

PHYSIQUE

Durée : 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve

L'usage d'abaques et de tables est interdit pour cette épreuve

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La pression est une grandeur dont le rôle est essentiel dans de nombreux domaines de la physique. On se propose ici d'illustrer quelques effets de cette grandeur dans différents domaines.

Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes

PARTIE A : PIÉZOÉLECTRICITÉ

On s'intéresse à un effet remarquable de la pression sur certains cristaux ou céramiques anisotropes, l'effet piézoélectrique, mis en évidence en 1880 par Curie, suivi par Lippmann, lord Kelvin et d'autres scientifiques de la fin du XIX^e siècle. La guerre de 1914-1918 vit naître la première application pratique de ce phénomène, le sonar, grâce aux possibilités de création et de détection d'ondes ultrasonores par des cristaux piézoélectriques. L'utilisation de la piézoélectricité est aujourd'hui très répandue, aussi bien dans l'électronique ou la détection fine que dans notre environnement quotidien.

Le quartz est le cristal piézoélectrique le plus connu ; il s'agit d'une forme cristallisée de la silice (SiO_2). Nous étudierons dans la suite les propriétés d'une lame dont les deux faces utiles, de surface S , sont perpendiculaires à l'axe X (figure 1) ; ces faces sont métallisées, ce qui fait de la lame un dipôle qui pourra être relié à un circuit électrique.

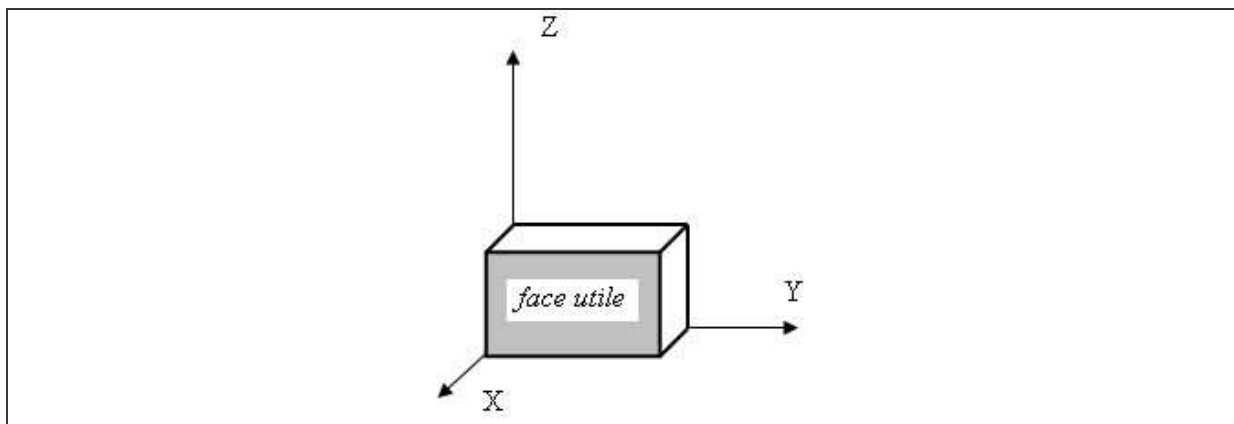


figure 1

Données numériques relatives au quartz :

surface de la lame	constante piézoélectrique	masse volumique	module de Young
$S = 1 \text{ cm}^2$	$\alpha = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ C.N}^{-1}$	$\rho = 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$	$E \approx 80 \cdot 10^9 \text{ Pa}$

Propriétés fondamentales :

Effet « direct » : il s'agit de l'apparition de charges électriques, et donc d'une tension, entre les faces utiles soumises à une contrainte mécanique.

Effet « inverse » : il s'agit de la déformation du même corps soumis à une tension électrique.

On constate que les variations des grandeurs mécaniques et électriques sont proportionnelles, et que les deux effets obéissent à la même équation (donnée ci-dessous, à la question 1) ; il est donc justifié de parler, au singulier, de « l'effet » piézoélectrique.

1. Effet « direct » : en régime continu, la lame équivaut à un condensateur de capacité $C \approx 10 \text{ pF}$, qui se charge avec une charge Q proportionnelle à une force de module F appliquée perpendiculairement à ses faces utiles : $Q = \alpha \cdot F$; α étant appelée « constante piézoélectrique ». On rappelle la définition de la capacité C du condensateur : $Q = C \cdot V$, V étant la tension aux bornes du condensateur .

- a. Exprimer la tension V apparaissant entre les faces utiles en fonction de la force subie. Application numérique : calculer la pression à appliquer pour que la tension atteigne 1 V.
- b. Un tel capteur serait-il commode pour suivre les variations de la pression atmosphérique ?
- c. Proposer une brève explication du principe des briquets ou des allume-gaz piézoélectriques.

2. Effet « inverse » : l'allongement ΔL d'un solide de longueur L soumis à une force de module F agissant sur une section S et s'exerçant orthogonalement à cette section est donné, en fonction du module d'Young E du matériau, par la loi :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S}$$

Estimer la tension à appliquer à la lame pour que sa longueur varie de 0,1 pour 100 ; est-ce une valeur facilement accessible ?

Modélisation microscopique :

Pour rendre compte de la déformation du cristal, on peut considérer un modèle dans lequel les molécules de silice sont liées entre elles par des forces de rappel obéissant à la loi de Hooke : $\mathbf{F} = -k \cdot \mathbf{x}$ ($k > 0$), \mathbf{F} étant le vecteur force de rappel et \mathbf{x} étant le vecteur déplacement par rapport à l'équilibre. Cela revient à modéliser les liaisons intermoléculaires par des ressorts. On rappelle qu'une association de q ressorts identiques en parallèle équivaut à un ressort de raideur $q \cdot k$, alors que leur association en série équivaut à un ressort de raideur k / q .

3. Dans un modèle grossier, les molécules SiO_2 sont supposées régulièrement réparties selon les trois directions (X, Y, Z), à raison de n molécules par unité de longueur, distantes de a en l'absence de force, une molécule étant située à chaque sommet d'un cube d'arête a . Quelle est la relation entre a et n ? Sur combien de ressorts perpendiculaires à la surface S agit-on en exerçant une force F sur une face utile de la lame ? Etablir également une relation entre la constante (ou nombre) d'Avogadro N_A , a , ρ et la masse molaire M .

4. La force F provoque un « enfoncement » ϵ de la première couche moléculaire ; exprimer F en fonction de S , a , k et ϵ .

5. On admet que la force F appliquée perpendiculairement à S se transmet dans les chaînes de molécules perpendiculaires à S , provoquant sur chaque ressort équivalent un même raccourcissement ϵ de la distance intermoléculaire initiale au repos a ; justifier que la variation relative d'épaisseur de la lame est $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\epsilon}{a}$.

6. Dédurre de ce qui précède la relation entre k , E et a et vérifier l'homogénéité de la formule obtenue.

7. Application numérique : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; $O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $\text{Si} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; calculer a , puis n et k .

Amplification :

Comme on l'a vu, un capteur piézoélectrique délivre une tension, qu'on appelle v_e , faible et qu'il convient donc d'amplifier. Considérons le montage de la figure 2 ci-dessous.

8. L'amplificateur opérationnel étant idéal, en régime linéaire, exprimer le rapport $\frac{v_s}{v_e}$.

9. Donner et justifier le nom du montage représenté figure 2.

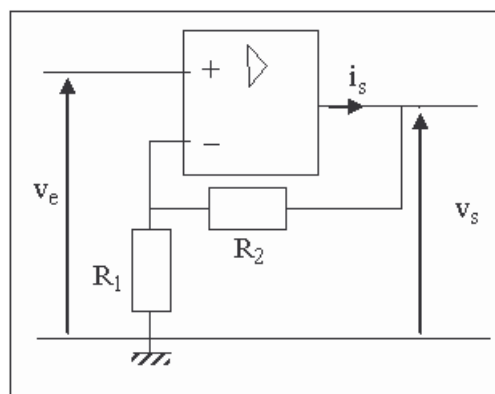


figure 2

PARTIE B : UN PEU D'OCÉANOGRAPHIE

Données numériques :

masse volumique de H ₂ O	viscosité dynamique de H ₂ O	P ₀	g
$\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$	$\eta \approx 10^{-3} \text{ Pa.s}$	1 bar	9,8 m.s ⁻²

Le changement d'état solide-liquide :

On s'intéresse aux deux états liquide et solide de l'eau. Les variables d'état sont la pression P, la température absolue T et le volume massique v.

1. Tracer l'allure du diagramme d'état d'un corps pur quelconque, en coordonnées (T,P). Que représentent les courbes, les domaines qu'elles délimitent, les points remarquables ? On précise, pour la suite, que, dans le cas de l'eau, la pente de l'équilibre solide-liquide est négative.

2. Quelle est la condition thermodynamique d'équilibre entre deux phases à pression et température données ? Établir la relation de Clapeyron relative à la courbe correspondante.

3. On s'intéresse à l'influence de la pression sur l'équilibre solide-liquide de l'eau. A 0°C, sous la pression P₀ = 1 bar, l'enthalpie *massique* de fusion vaut $\Delta H_F = 3,33.10^2 \text{ kJ.kg}^{-1}$, et les volumes *massiques* respectifs du liquide et du solide valent $v_L = 1,00 \text{ L.kg}^{-1}$ et $v_S = 1,09 \text{ L.kg}^{-1}$ respectivement.

3.a calculer la pente de la courbe d'équilibre solide-liquide au point considéré.

3.b estimer la température de fusion de la glace au fond d'une fosse océanique, à une pression de l'ordre de 1000 bars ; commenter.

Pression sous-marine :

Dans la suite, on étudie le champ de pression dans une masse d'eau liquide dans un champ de pesanteur uniforme, de température uniforme, en contact avec l'atmosphère à la pression P₀.

Lorsque ce sera nécessaire, on utilisera un axe vertical Oz orienté vers le haut, avec l'origine à la surface libre du liquide.

4. Rappeler *sans démonstration* l'équation *locale* de la statique des fluides liant la pression et l'altitude z dans un fluide en équilibre hydrostatique dans le champ de pesanteur ; on donnera une forme vectorielle ou algébrique.

En déduire l'expression de la pression P(z) dans l'océan en précisant les hypothèses faites.

5. Application numérique : justifier l'habitude des plongeurs de considérer que 10 mètres d'eau équivalent à une augmentation de pression égale à la pression atmosphérique. On rappelle la valeur du champ de pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

6. Le coefficient de compressibilité isotherme χ_T de l'eau liquide valant $5.10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ à température ambiante, estimer la diminution relative du volume massique à 40 m de profondeur ; commenter la valeur obtenue.

Une source sous-marine :

« Ça ressemble à de la magie : à 800 m de la côte méditerranéenne, en pleine mer, surgit une source d'eau douce, issue d'un tuyau branché 36 m plus bas. Il n'y a ni système de pompage ni forage : l'eau douce, moins dense que l'eau de mer, remonte naturellement. C'est le miracle d'Archimède. Il suffit de la canaliser, Nymphaea Water l'a fait, depuis le 23 juillet. [...] depuis les montagnes calcaires environnantes, l'eau s'infiltré, et une partie de l'eau ressort là, en pleine mer. Depuis, sans doute, des milliers d'années. Les pêcheurs du coin connaissaient la source de La Mortola ; certains auraient même bricolé une prise avec un tuyau, il y a vingt ans. [...]

En surface, le dispositif est discret : trois flotteurs orange et un tuyau blanc d'où sort une petite fontaine. Au fond, sur la source, on a fixé par des pieux une embase en résine et béton, prise dans un coffrage d'acier. Puis on y a attaché une sorte de tulipe qui régule la pression. Un flexible de 30 m de long guide l'eau vers la surface. On goûte : légèrement salée, fraîche et bonne. On dirait de la Badoit sans bulles. Un peu trop salée quand même, autour de 1 g/L, pour de l'eau potable. Il suffirait, selon Nymphaea, de la mélanger avec de l'eau du réseau pour la rendre potable. Débit moyen : 100 litres/seconde ; 88 litres/s à l'étiage du mois d'août. »

© Libération, Michel HENRY, samedi 27 septembre 2003

Inspirés par cette démarche innovante, intéressons-nous à la circulation de l'eau, en régime permanent, dans un tuyau cylindrique vertical rigide de section circulaire uniforme, de rayon R . L'axe du cylindre est pris comme axe des z .

On se place dans un cas où la loi de Poiseuille est vérifiée.

7. Représenter qualitativement et commenter l'allure du module de la vitesse en fonction de la distance à l'axe du cylindre, selon que l'on considère ou non le fluide comme parfait ; on expliquera qualitativement la notion de viscosité.

8. On considère une longueur L de l'écoulement du fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η .

Rappeler la loi de Poiseuille reliant le débit volumique D_v à la différence de pression ΔP entre le bas et le haut du cylindre : $\Delta P = P(z) - P(z+L)$ Préciser les conditions de validité de cette loi.

9.a Commenter le cas où la différence de pression ΔP est égale à $\Delta P = \rho g L$.

9.b À partir des données du texte, calculer la quantité $\Delta P - \rho g L$ nécessaire pour que l'eau jaillissant d'une source sous-marine située à la profondeur de 30 mètres sous la surface libre de la mer, dont le débit est $D_v = 100 \text{ L.s}^{-1}$, puisse jaillir à la surface libre. On donne : $R = 25 \text{ cm}$ (valeur précisée dans un autre article) et on précise la viscosité dynamique moyenne de l'eau de mer : $\eta = 1,0.10^{-3}$ poiseuille.

9.c Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement ainsi que le nombre de Reynolds correspondant ; conclure.

PARTIE C : DU LIQUIDE AU GAZ

Données numériques :

H ₂ O	masse molaire M	capacité thermique massique de l'eau liquide c_{liq}	enthalpie massique de vaporisation de l'eau L_{vap} (100°C, 1 bar)
	18 g.mol ⁻¹	4180 J.kg. ⁻¹ K ⁻¹	2,24.10 ⁶ J.kg ⁻¹

	H ₂ O	propane	butane
T_C	374 °C	98 °C	153 °C
T_v sous 1 bar	100 °C	- 42 °C	≈ 0 °C
P_{sat} à 20 °C		≈ 7 bar	≈ 1,1 bar
μ_{liq} (kg.m ⁻³)		515	585

où T_C est la température critique du corps pur considéré, T_v est la température de vaporisation du corps pur considéré, P_{sat} est la pression de vapeur saturante du corps pur considéré et μ_{liq} la masse volumique du corps pur liquide considéré, masse volumique supposée indépendante de la température et de la pression.

Le changement d'état :

On s'intéresse aux deux états fluides (liquide et gaz) d'un corps pur. Les variables d'état sont la pression P , la température absolue T et le volume, noté V pour le volume molaire et v pour le volume massique. On note (v_C, P_C, T_C) les coordonnées du point critique.

1. Représenter dans le diagramme $P(v)$ les transformations isothermes du fluide, en illustrant et expliquant rapidement les notions suivantes : mélange diphasé, palier de changement d'état, courbe de rosée, courbe d'ébullition, point critique.

2. Exprimer en fonction des données nécessaires les variations d'enthalpie massique Δh et d'entropie massique Δs associées à une transition liquide \rightarrow vapeur à la température de 100 °C ; effectuer et commenter les applications numériques dans le cas de l'eau.

3. Quelle est l'entropie massique créée lors de la vaporisation de l'eau, initialement liquide, au contact d'un thermostat à 100°C sous 1 bar ?

Stockage des fluides :

4. On se place à 20 °C. Une bouteille ordinaire de butane ou de propane est approximativement un cylindre de hauteur 35 cm et de diamètre 30 cm. Lorsque la bouteille est pleine, la masse de butane ou de propane contenue dans cette bouteille est égale à 5 kg. On rappelle que la formule chimique du butane est C₄H₁₀, celle du propane C₃H₈ et que les masses atomiques de C et H sont : C = 12 g.mol⁻¹ et H = 1 g.mol⁻¹.

Déterminer, successivement pour le butane et le propane, la masse volumique μ_{vap} de chacun de ces gaz, considéré comme un gaz parfait, lorsqu'il est à 20 °C sous sa pression de vapeur saturante correspondant à la température de 20 °C.

Déduire alors de la comparaison entre les trois valeurs μ_{liq} , μ_{vap} et μ , masse volumique moyenne du corps pur considéré dans la bouteille, l'état physique dans lequel se trouve chacun de ces corps purs dans la bouteille. Déterminer alors la pression dans chacune de ces bouteilles. On rappelle que : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

5. Expliquer la présence d'un détendeur ramenant le gaz à la pression ambiante dans les installations de butane ou de propane.

6. On constate qu'un débit prolongé peut entraîner la formation de givre au voisinage du détendeur. On considérera que le gaz est un gaz parfait et, très grossièrement, que la sortie de gaz de la bouteille se fait de façon adiabatique et réversible. On notera γ le rapport $\frac{C_p}{C_v} > 1$, supposé constant, entre les capacités thermiques à pression constante et à volume constant du gaz. Montrer qu'il se produit un refroidissement au niveau du détendeur. On ne demande pas d'application numérique.

Pression dans un gaz :

7. On s'intéressera dans la suite à une propriété optique du fluide : son indice de réfraction n . La loi de Gladstone (1827-1902) donne l'indice de réfraction n d'un gaz de masse molaire M et de masse volumique ρ par la relation : $(n - 1).M / \rho = \text{constante} = C$
En déduire la relation analogue entre l'indice de réfraction n , P et T pour un gaz parfait ; vérifier la cohérence de l'expression pour les faibles pressions.

8. On peut améliorer la description théorique des gaz en introduisant dans l'équation d'état dite « des gaz parfaits » des termes correctifs ; on s'intéresse ici à l'équation d'état d'une mole de gaz. On obtient ainsi l'équation dite « de Van der Waals » :

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

Justifier grâce à cette dernière expression que le terme $b > 0$ peut être associé à la notion de « volume propre » des molécules et que le terme a / V^2 ($a > 0$) peut être associé à des interactions intermoléculaires attractives.

PARTIE D : PROPRIÉTÉS OPTIQUES

L'indice de réfraction des fluides dépend fortement de la pression ; on va l'illustrer ici. On envisage dans la suite un dispositif permettant de mesurer précisément les variations de l'indice n d'un fluide : le réfractomètre interférométrique de lord Rayleigh (1842-1919).

N.B. : on utilisera autant que nécessaire l'approximation de Gauss et la petitesse des angles.

1. Dispositifs des trous d'Young : S est un trou source ponctuel situé dans le plan de la figure 3, situé sur l'axe optique de la lentille convergente L_1 et dans le plan focal objet de celle-ci. Elle émet une lumière monochromatique de longueur d'onde λ . E_1 est un écran percé de deux trous quasi ponctuels S_1 et S_2 séparés par une distance a .

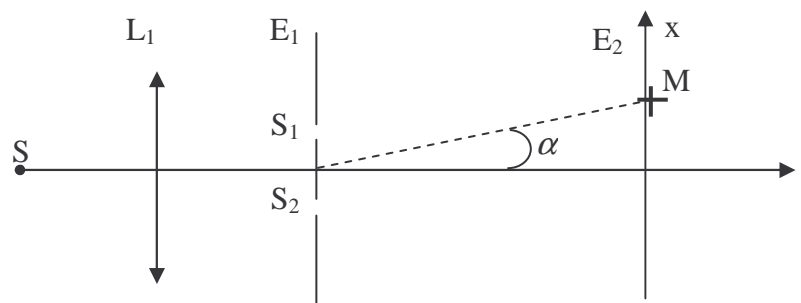


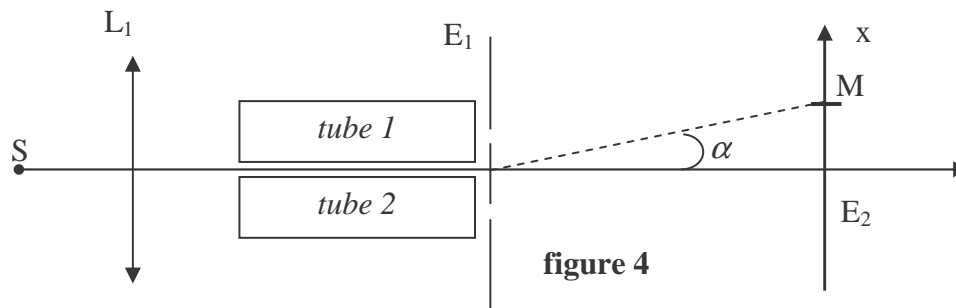
figure 3

Faire apparaître sur un schéma purement qualitatif la zone d'interférence.

2. Établir l'expression de la différence de marche $\delta(M)$ entre deux rayons SS_2M et SS_1M , interférant en un point M situé sur un écran E_2 placé parallèlement à E_1 et à la distance D de celui-ci. On pourra repérer le point M soit par son abscisse x , supposée très petite devant D , soit par l'angle α (voir figure 3), supposé très petit. Rappeler sans démonstration l'expression de l'intensité lumineuse $I(M)$ en fonction de l'intensité lumineuse maximale I_0 sur l'écran, λ et $\delta(M)$, puis donner l'expression de $I(M)$ en fonction de I_0 , λ , a , D et x et enfin en fonction de I_0 , λ , a et α . En déduire, en fonction de λ , a et D , l'interfrange linéaire Δx , c'est-à-dire l'écart en x entre deux maxima d'intensité voisins.

3. Application numérique : on observe facilement sur un écran des figures dont l'interfrange linéaire est de l'ordre du millimètre ; à quelle distance D de E_1 faudra-t-il placer l'écran E_2 pour respecter ce critère si $a = 1 \text{ mm}$ et $\lambda = 590 \text{ nm}$?

4. Le dispositif de Rayleigh utilise deux tubes de longueur d interposés sur chacun des trajets correspondant à SS_1 et SS_2 (figure 4) :



On observe d'abord le système de franges lorsque les deux tubes sont remplis d'air d'indice n_1 , puis on modifie progressivement les conditions physiques imposées à l'air du tube 2 dont l'indice atteint finalement la valeur n_2 . Établir, en fonction de δ , n_1 , n_2 et d , l'expression de la nouvelle différence de marche $\delta'(M)$ entre deux rayons SS_2M et SS_1M à l'état final, et en déduire le nombre de franges qui ont défilé en M sur E_2 .

5. Application numérique : calculer la différence d'indice minimale observable, c'est-à-dire provoquant le déplacement du système d'une frange, si $d = 1 \text{ m}$ et $\lambda = 590 \text{ nm}$.

6. On utilise dans la suite la loi de Gladstone qui donne le « pouvoir réfringent » $n-1$ d'un gaz parfait sous la forme : $\frac{(n-1)T}{P} = \text{constante}$. Déterminer la plus petite variation de pression détectable entre les tubes, à température fixée, si $n_1 = 1,000\,272$ à 20°C sous 1 bar.

7. Pour que le résultat précédent soit valable, il faut maintenir la température constante et identique entre les deux tubes ; avec quelle précision cela doit-il être réalisé pour ne pas perturber la mesure d'une variation de pression ?

FIN