

Physique

Durée : 3h30

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le problème illustre sur l'exemple de la vinification différents phénomènes physiques et leur utilisation potentielle pour améliorer la production de vins. **Il est décomposé en quatre parties toutes indépendantes.** Les trois premières portent sur différents aspects de la spectroscopie infrarouge en tant qu'outil de contrôle de la fermentation alcoolique. La dernière partie traite du phénomène d'évaporation au travers des pores du chêne qui intervient lors de fermentation puis de la maturation du vin en fûts.

La spectroscopie infrarouge est une technique de mesure de plus en plus utilisée pour le suivi de procédés industriels et le contrôle de qualité. Elle permet en effet d'obtenir en temps réel de l'information sur les propriétés physiques et chimiques du milieu analysé.

La première partie de ce problème s'intéresse au principe de la mesure de spectres d'absorption vibrationnelle dans le cadre du suivi par spectroscopie infrarouge de la fermentation alcoolique.

La seconde partie s'intéresse quant à elle à la partie optique d'un spectroscope à réseau permettant de sélectionner la longueur d'onde désirée. Enfin, la troisième partie traite de l'aspect électronique de la détection de fréquence du signal.

I. Principe de l'absorption vibrationnelle :

Dans cette partie, on supposera le mouvement unidimensionnel et on ne prendra en compte que la tension du ressort (en particulier, on négligera le poids).

On s'intéresse aux vibrations d'une molécule diatomique hétéronucléaire.

Pour modéliser ces vibrations, on considère que chaque atome se déplace avec un mouvement harmonique. La liaison est représentée par un ressort sans masse de raideur k qui relie les deux atomes 1 et 2 de la molécule. On note (Ox) l'axe parallèle à la liaison, $x_1(t)$ représente à l'instant t la position de l'atome 1 de masse m_1 , $x_2(t)$ représente la position de l'atome 2 de masse m_2 (cf figure 1).

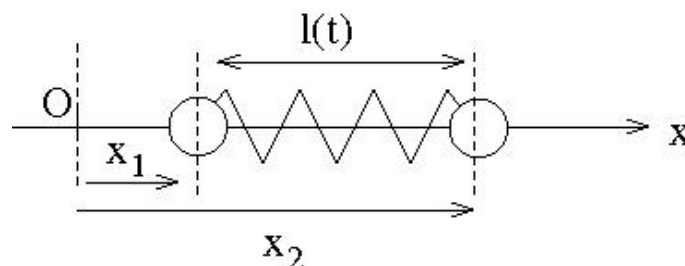


Figure 1

On note $l(t)$ la distance entre les deux atomes à l'instant t et l_e la distance à l'équilibre.

I.1 Écrire l'équation de la dynamique pour l'atome 1. On justifiera le signe de la force exercée sur l'atome 1.

I.2 Faire de même pour l'atome 2.

I.3 En déduire que le mouvement vibratoire peut être décrit par l'équation :

$$\mu \frac{d^2 l}{dt^2} = -k(l - l_e) \quad (1) \quad \text{où l'on introduit la masse réduite } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

I.4 Résoudre l'équation précédente et en déduire l'expression de la pulsation de vibration ω_{vib} et de fréquence de vibration f_{vib} du système en fonction de k et μ . Quelle est l'unité de f_{vib} ?

I.5 Calculer l'énergie potentielle $V(l)$ du système en fonction de k , l et l_e , en supposant qu'en $l = l_e$, $V(l_e) = -V_0$ avec $V_0 > 0$. Tracer $V(l)$. En quoi la forme du potentiel est-elle irréaliste pour les grandes distances l et en $l = 0$? En déduire une allure plus plausible du potentiel d'interaction d'une molécule diatomique. Que représente V_0 ? Sachant que pour toutes les molécules diatomiques, la distance à l'équilibre a toujours le même ordre de grandeur (quelques angströms), justifier (en 3 lignes maximum) que k est qualitativement relié à la solidité de la liaison.

I.6 En spectroscopie moléculaire, les fréquences de vibration moléculaires sont abusivement exprimées en cm^{-1} et non en Hertz. On devrait alors parler plus rigoureusement de nombre d'onde σ caractéristique de la vibration. Les deux unités nombre d'onde σ et fréquence f sont reliées par la vitesse de la lumière c ($c = 3.10^8 m.s^{-1}$).

Par analyse dimensionnelle, déduire la relation entre σ , f et c . On admettra ici qu'aucun facteur numérique sans dimension n'est nécessaire.

Quelle fréquence exprimée en Hz correspond $1cm^{-1}$?

I.7 Les "fréquences" de vibration des molécules $^{79}Br^{85}Rb$ et $^{84}Kr^{85}Rb$ sont respectivement $181 cm^{-1}$ et $13 cm^{-1}$.

La différence de valeurs entre ces deux fréquences peut-elle se justifier par la différence entre les masses du brome et du krypton ? Justifier (en quelques lignes au maximum).

Que pouvez-vous en déduire qualitativement sur les valeurs relatives des forces des deux liaisons ? Sachant que le krypton fait partie de la famille des gaz rares (dernière colonne de la classification périodique), que le brome est un halogène (avant-dernière colonne) et le rubidium un métal alcalin (première colonne), la différence de valeurs des fréquences vibrationnelles est-elle surprenante ? Justifier (en quelques lignes au maximum).

I.8 Dans l'alcool éthylique (éthanol CH_3CH_2OH), on cherche à étudier le mouvement de l'atome d'hydrogène du groupe OH par rapport au reste de la molécule. Quelles sont les masses m_1 et m_2 à considérer ?

On donne $M(C)=12 g.mol^{-1}$, $M(O)=16 g.mol^{-1}$ et $M(H)=1 g.mol^{-1}$ et le nombre d'Avogadro $N_a = 6,02.10^{23}$.

En raisonnant sur la masse réduite μ , montrer que le mouvement de l'atome H est approximativement celui qu'il aurait s'il était attaché à une masse infinie par une liaison dont la constante de force est caractéristique de la liaison OH. En déduire l'expression et la valeur de μ .

Calculer alors k pour cette liaison sachant que $\sigma_{OH} = 3600 cm^{-1}$.

I.9 Une onde électromagnétique caractérisée par sa fréquence f s'interprète du point de vue de la molécule comme une force sinusoïdale F de fréquence f qu'on supposera d'amplitude F_0 . Préciser la forme de la force F .

En admettant que, dans le cas de la présence d'une onde électromagnétique, le mouvement vibratoire de la molécule est identique à celui de la masse réduite auquel on ajoute simplement la force F , montrer

que l'équation du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\mu \frac{d^2 l}{dt^2} = -k(l - l_e) + F_0 \cos(\omega t) \text{ où l'on précisera la relation entre } \omega \text{ et } f .$$

I.10 On s'intéresse au mouvement forcé de la masse réduite sous l'influence de la force F . Pour ce faire, on utilise la notation complexe en posant $\begin{cases} \underline{\delta l} = \underline{l - l_e} = \underline{l_0} \exp j\omega t \\ \underline{F} = \underline{F_0} \exp j\omega t \end{cases}$ avec $j^2 = -1$. On cherche alors à déterminer la fonction de transfert $\underline{T} = \frac{\underline{v}}{\underline{F}}$ où $\underline{v} = \frac{d\underline{\delta l}}{dt}$ désigne la vitesse de la masse réduite.

Déterminer \underline{T} .

I.11 Représenter l'allure de $|\underline{T}|$ en fonction de la fréquence f . Quel est le maximum de $|\underline{T}|$ et pour quelle fréquence f a-t-on ce maximum ? Quel phénomène physique ayant été négligé pourrait rendre ce résultat plus réaliste ?

L'amplitude de la réponse en vitesse $|\underline{T}|$ caractérise parfaitement l'absorption de l'onde électromagnétique par la molécule. Plus cette amplitude est grande, plus le phénomène d'absorption est important. Plus généralement, on rappelle que la spectroscopie infrarouge permet de déterminer les groupes fonctionnels d'une molécule à partir de la mesure de son spectre d'absorption vibrationnelle.

II Étude des principaux composants d'un spectromètre :

La source de lumière est une lampe halogène émettant dans toutes les directions de l'espace et dont le spectre d'émission est continu sur une plage de longueurs d'onde couvrant le domaine du visible et du proche infrarouge (400nm-2000nm). On l'assimilera à une source ponctuelle située en S. La source est au point focal objet d'une première lentille mince convergente L_1 d'axe optique (Sx) située en O_1 . Un diaphragme \mathcal{D} de diamètre d centré sur l'axe optique sélectionne les rayons issus de L_1 proches de l'axe. Une seconde lentille L_2 de distance focale f_2 focalise le faisceau issu de L_1 dans la fente d'entrée d'un spectromètre située en F_2' et illumine ainsi un miroir sphérique \mathcal{M}_3 situé en O_3 . **Aucune connaissance sur les miroirs sphériques n'est nécessaire pour pouvoir traiter cette partie.**

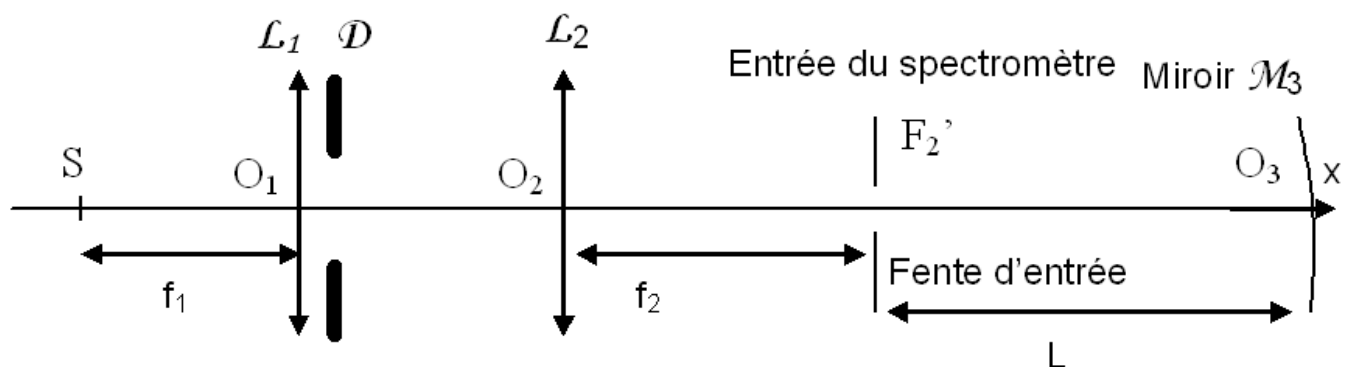


Figure 2

II.1.a Tracer deux rayons lumineux issus de la source S et arrivant au miroir \mathcal{M}_3 .

II.1.b Quelle doit être l'expression de la distance focale f_2 de L_2 pour qu'une portion circulaire de diamètre d_3 du miroir soit éclairée? On donne : $F_2'O_3 = L$.

II.2 Le miroir M_3 est un miroir sphérique qui est incliné par rapport à l'axe (O_1x) . On admettra l'approximation que tous les rayons passant par F_2' sont réfléchis par le miroir en étant parallèles à l'axe O_3O (voir figures 3 et 4). Les rayons éclairent un réseau par réflexion, situé en O , présentant des traits équidistants de pas h , avec un angle d'incidence i (mesuré algébriquement) par rapport à la normale au réseau (voir figure 4). De même, on note θ l'angle des rayons diffractés (mesuré algébriquement) par rapport à la normale au réseau.

II.2.a On appelle n le nombre de traits par unité de longueur du réseau. Quelle est la relation entre le pas h et n ?

II.2.b Exprimer, en justifiant clairement le calcul, la différence de marche δ entre les rayons (1) et (2) de la figure 4 en fonction de h , i et θ .

On notera θ_k la direction qui correspond au k -ième maximum pour une longueur d'onde λ .

II.2.c En précisant clairement (en quelques lignes maximum) le raisonnement, montrer que la relation des réseaux par réflexion qui relie θ_k à i , h et λ s'écrit : $\sin(i) + \sin(\theta_k) = k \frac{\lambda}{h}$.

À quoi correspond le maximum θ_0 d'ordre 0 ? Commenter ce résultat (3 lignes maximum).

II.3 Un second miroir M_4 centré en O_4 et identique à M_3 collecte les rayons diffractés et les fait converger au niveau de la fente de sortie F_4 du spectromètre. On admettra de même que seuls les rayons parallèles à OO_4 convergent en F_4 et peuvent ainsi quitter le spectromètre. Les autres rayons sont bloqués par les parois du spectromètre. On note $\varphi = i - \theta$ la valeur de l'angle entre les directions OO_3 et OO_4 . Dans la pratique, les miroirs M_3 et M_4 étant fixes, l'angle φ est fixé et ne peut donc varier.

II.3.a Justifier que seules certaines longueurs d'onde émises par la lampe halogène dans l'intervalle spectral [400nm-1200nm] sont ainsi sélectionnées pour un angle d'incidence i donné. Donner leur expression. Faites l'application numérique pour $\varphi = 20^\circ$, $i = 25^\circ$ et un réseau de 1200 traits par millimètres. On exprimera les longueurs d'onde trouvées en nanomètres.

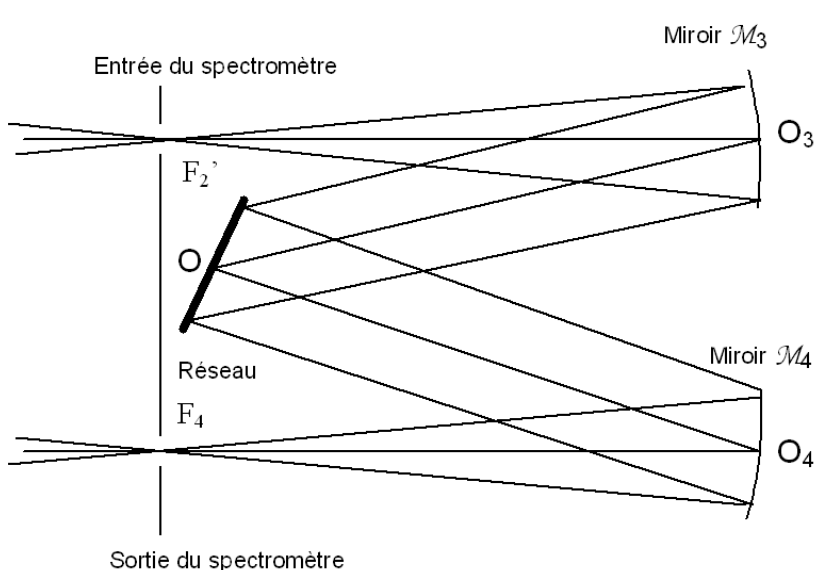


Figure 3

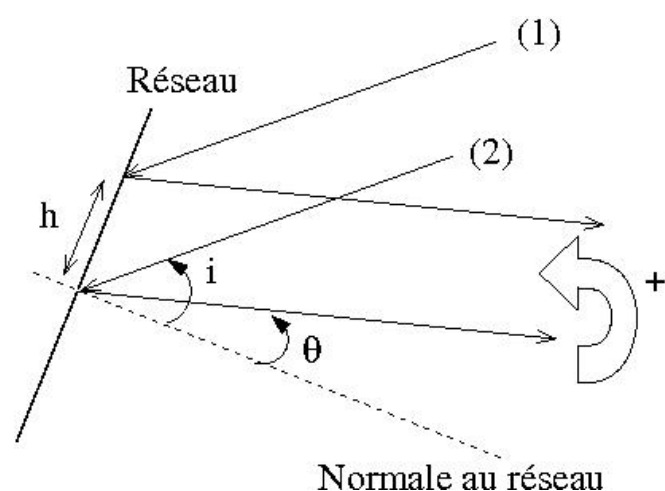


Figure 4

II.3.b Le réseau est placé sur un plateau tournant autour de l'axe (Oz) perpendiculaire au plan de la figure 4 de telle sorte à faire varier l'angle d'incidence i et choisir ainsi la longueur d'onde de sortie du spectromètre. Les miroirs restent quant à eux fixes. Sachant que le réseau ne peut tourner que pour des angles i compris entre $i_1 = 20^\circ$ et $i_2 = 60^\circ$, quelle plage de longueurs d'onde diffractées à l'ordre $+1$ est ainsi sélectionnée à la sortie du spectromètre? Donner l'application numérique (en nanomètres) pour $\varphi = i - \theta = 20^\circ$ et un réseau de 1200 traits/mm.

II.4 On définit l'efficacité dispersive du réseau par l'expression:

$$e_k = \left(\frac{\partial \theta_k}{\partial \lambda} \right)_{i,k}$$

Donner son expression en fonction de λ , i , h et k . Comment évolue e_k avec h pour tout autre paramètre constant?

II.5 Dans le cadre du suivi par spectroscopie infrarouge de la fermentation alcoolique, on souhaite étudier plus particulièrement le spectre d'absorption du milieu situé entre 1400nm et 1600nm. On dispose pour cela de trois réseaux possibles de nombre de traits par millimètres 300, 600 et 1200. Parmi ces trois réseaux, lequel choisiriez-vous et pourquoi?

III Détection synchrone :

Cette partie s'intéresse au système de détection de spectres. Il est composé d'un photodétecteur qui délivre une tension électrique proportionnelle à l'intensité du signal optique reçu et d'un système dit de détection synchrone qui permet d'extraire des signaux électriques faibles qui sont noyés dans le bruit de la mesure.

On s'intéresse par la suite au principe de la détection synchrone. Le montage électrique est donné figure 5. La tension d'entrée $V_e(t)$ délivrée par le photodétecteur est multipliée par un signal de référence $V_{ref}(t)$ et est ensuite filtrée.

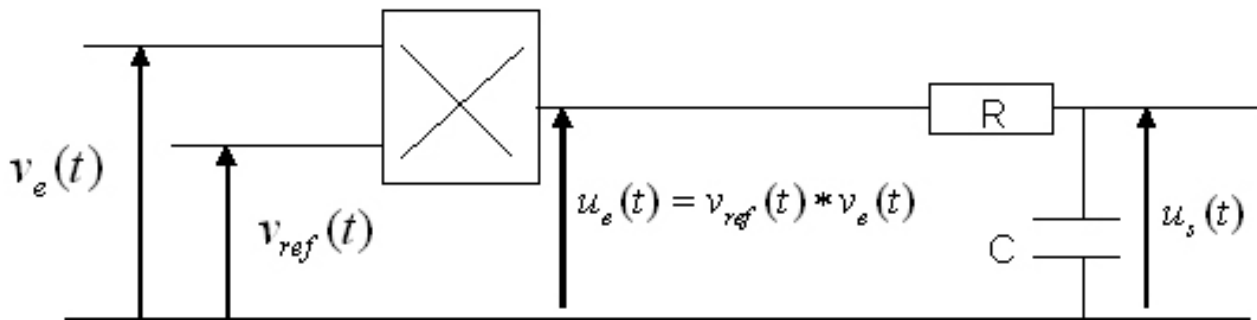


Figure 5

III.1 On étudie tout d'abord le filtre RC. On se place en régime sinusoïdal. On associe à la grandeur $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$, la grandeur complexe, $\underline{u} = U \exp j(\omega t + \varphi)$ avec $j^2 = -1$.

III.1.a À partir d'un raisonnement qualitatif basé sur le comportement à haute et basse fréquence d'un condensateur, prévoir la nature du filtre étudié (4 lignes au maximum).

III.1.b Déterminer la fonction de transfert en notation complexe $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$. Mettre le résultat sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_0}}. \text{ Exprimer } H_0 \text{ et } f_0 \text{ en fonction de } R \text{ et } C.$$

III.1.c En déduire la fréquence f_c pour laquelle $|\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$. Cette fréquence sera appelée la fréquence de coupure du filtre.

III.1.d On note $\underline{H} = |\underline{H}| \exp(j\psi)$ où $|\underline{H}|$ et ψ désignent respectivement le module et l'argument de \underline{H} . Tracer l'allure du module de $|\underline{H}|$ en fonction de f . Comment se comporte le filtre aux hautes et aux basses fréquences, c'est-à-dire respectivement pour $f \gg f_c$ et $f \ll f_c$? Quelle est la nature du filtre?

III.1.e Exprimer ψ en fonction de R , C et ω .

III.2 Le signal d'entrée $v_e(t)$ est la somme d'un signal sinusoïdal de fréquence f et d'un terme de bruit que l'on notera $b(t)$ et que l'on supposera sinusoïdal de fréquence f_b , $b(t) = b_0 \cos(2\pi f_b t)$, soit $v_e(t) = V_e \cos(2\pi f t) + b(t)$. Le principe de la détection synchrone est alors d'accéder expérimentalement à une mesure du signal v_e tout en s'affranchissant du bruit.

Le signal de référence a la même fréquence f et s'écrit: $v_{ref}(t) = V_{ref} \cos(2\pi f t)$.

III.2.a En utilisant la relation: $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$, montrer que le produit $v_{ref}(t)v_e(t)$ s'écrit sous la forme d'une somme :

$$v_{ref}(t)v_e(t) = A + B \cos(4\pi f t) + C \cos(2\pi (f_b - f)t) + C \cos(2\pi (f_b + f)t)$$

On explicitera les constantes A, B et C en fonction de V_e , V_{ref} et b_0 . On remarquera en particulier que certaines de ces constantes ne s'expriment qu'en fonction de V_e et V_{ref} , ce qui, connaissant V_{ref} , permettrait de mesurer V_e en s'affranchissant du bruit.

III.2.b Supposons que le signal parasite a une fréquence $f_b = 600\text{Hz}$ et que la fréquence f du signal de référence est $f = 500\text{Hz}$. Quelles sont les fréquences des deux composantes sinusoïdales du signal parasite que l'on obtient à la sortie du multiplicateur?

III.2.c Le circuit RC étant composé d'éléments linéaires, on peut appliquer le principe de superposition. Rappeler l'énoncé du principe de superposition.

On pose $e_1 = A$, $e_2 = B \cos(4\pi f t)$, $e_3 = C \cos(2\pi (f_b - f)t)$ et $e_4 = C \cos(2\pi (f_b + f)t)$ et on remarquera que l'entrée du filtre RC s'écrit $u_e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. En utilisant les résultats de la question III.1 préciser l'expression de l'amplitude des sorties s_1 , s_2 , s_3 et s_4 associées respectivement à e_1 , e_2 , e_3 et e_4 . Comment s'écrit alors la sortie $u_s(t)$?

III.2.c.1 Le signal parasite a une amplitude b_0 10 fois plus importante que l'amplitude V_e du signal que l'on cherche à mesurer. Si on souhaite atténuer l'amplitude de la composante de $u_s(t)$ associée au bruit parasite (c'est-à-dire reliée à l'amplitude b_0) de plus basse fréquence par un facteur 1000 grâce au

filtre RC, quelle valeur numérique doit on choisir pour f_c ?
 Quel est alors l'intérêt d'un tel filtre (réponse en 3 lignes maximum) ?

IV Écoulement à travers un milieu poreux :

Cette dernière partie du problème s'intéresse à l'étape de maturation du vin dans des fûts (tonneau) en chêne. Dans la réalité, ce phénomène est extrêmement complexe et on se contentera ici d'un modèle simpliste permettant la modélisation de l'évaporation d'une partie du liquide au travers des pores du chêne.

IV.1 Loi de Poiseuille

On s'intéresse aux principales caractéristiques de l'écoulement du vin à travers le milieu poreux que constitue le fût en chêne. Pour cela, on étudie tout d'abord l'écoulement à travers un seul pore du chêne que l'on modélisera comme une conduite cylindrique de rayon a , d'axe de symétrie horizontale ($x'x$) et de longueur L selon ($x'x$), voir figure 6. Le fluide est newtonien, incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η . L'écoulement est laminaire et permanent selon la direction ($x'x$) et on note $P(x)$ la pression supposée uniforme dans le plan d'abscisse x . On suppose que le gradient de pression selon ($x'x$) est constant et vaut $\frac{dP}{dx} = -\Delta P / L$ avec $\Delta P > 0$ sur la longueur L du pore. La vitesse d'une particule de fluide à la distance r de l'axe est notée $\vec{v} = v(r)\vec{u}_x$ avec \vec{u}_x vecteur unitaire de l'axe ($x'x$).

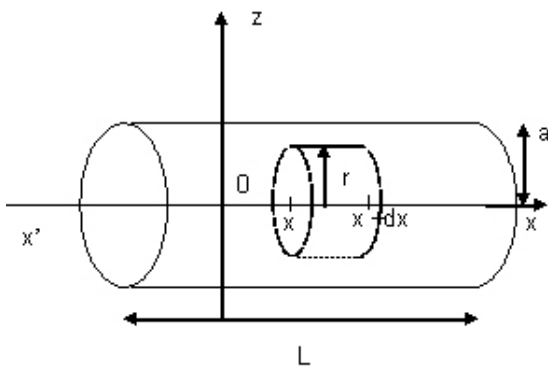


Figure 6

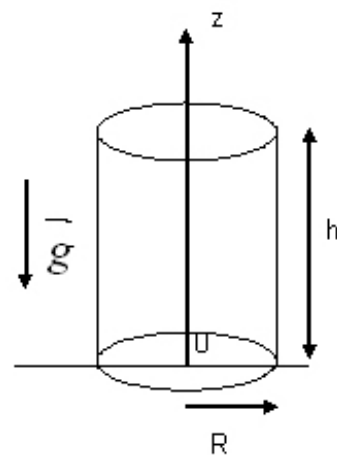


Figure 7

IV.1.a En appliquant le théorème d'Euler au volume de contrôle cylindrique de rayon r et situé entre les plans d'abscisses x et $x + dx$ (cf. figure 6), démontrer que la vitesse a pour profil :

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta P}{L} (a^2 - r^2)$$

IV.1.b En déduire que le débit volumique D_v à travers le cylindre de diamètre $d = 2a$ s'écrit :

$$D_v = \frac{\pi}{128\eta} \left(\frac{\Delta P}{L}\right) d^4$$

IV.2 Loi de Darcy

On modélise par la suite le milieu poreux par un ensemble de pores cylindriques identiques d'axe horizontal et normal à la paroi d'épaisseur L du tonneau. On note n le nombre de pores par unité de surface, $d = 2a$ le diamètre de chaque pore; leur longueur selon Ox est égale à l'épaisseur de la paroi, soit L .

IV.2.a On définit la porosité comme le volume total des pores sur le volume total du milieu poreux. Exprimer la porosité Φ en fonction des données du problème.

IV.2.b Un gradient de pression $\frac{\Delta P}{L}$ existe de part et d'autre de la paroi du chêne. En supposant que l'écoulement à travers un pore vérifie la loi de Poiseuille, en déduire que le débit volumique total par unité de surface vérifie la loi de Darcy: $D_v = \frac{k \Delta P}{\eta L}$ avec k la perméabilité, qui est une fonction de d et Φ que l'on exprimera.

IV.3 Modélisation de l'évaporation.

On supposera que le vin franchit la paroi en chêne et s'évapore au contact avec l'air.

On cherche à estimer le volume de vin qui franchit la paroi par an. On assimilera pour cela le tonneau à un cylindre de diamètre $R = 1 \text{ m}$ et de longueur $h = 0,5 \text{ m}$ déposé verticalement (voir figure 7). On supposera que l'écoulement ne s'effectue que sur les parois latérales du cylindre.

On prendra pour pression à l'extérieur du tonneau la pression atmosphérique P_0 . La pression à l'intérieur du tonneau est gouvernée par la loi de l'hydrostatique, la pression au sommet du tonneau étant P_0 .

IV.3.a Rappeler l'équation de la statique des fluides. En déduire l'expression de la pression $P(z)$ à l'intérieur du tonneau.

IV.3.b On supposera qu'au niveau d'un pore, la pression peut être considérée comme constante le long de sa section, de telle sorte que l'expression établie en **IV.2.b** reste valable. La perméabilité du chêne utilisé est de $k = 0.01 \text{ darcy}$ ($1 \text{ darcy} = 1 \mu\text{m}^2$). Sachant que $\eta = 10^{-3} \text{ Pl}$, $\rho = 1 \text{ kg} \cdot \text{l}^{-1}$, $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $L = 2 \text{ cm}$, exprimer de façon littérale D_{tot} le débit volumique de vin qui s'écoule à travers le tonneau. En déduire numériquement le volume de vin perdu par an. Le modèle est-il réaliste ?

FIN DE L'ÉPREUVE