

Exercice 1

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2(x-1)} \ln x & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$, et calculer sa dérivée.
2. Etudier les variations de f , donner l'allure de son graphe.
3. Soit a un réel strictement positif et (x_n) la suite de réels définie par les conditions
$$x_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, x_{n+1} = f(x_n).$$
Etudier la suite (x_n) lorsque $a > 1$; est-elle convergente? déterminer sa limite éventuelle.
Aide au calcul Pour tout $x > 0$ on a: $\ln x \leq x - 1$.

Couplage n°1

Exercice 2

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBAA... signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3, 4 et 5 il a choisi le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série BBAAAB...)

On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

- 1) Déterminer la loi de L_1 et vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$.
- 2) Déterminer l'espérance mathématique de L_1 .
- 3) Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1, L_2) et en déduire la loi de L_2 .

Exercice 1

Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions continues sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \int_0^x (x-t)f(2t)dt + 1.$$

1. Démontrer que si f est une solution du problème alors f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$, pour tout réel x .
2. En déduire que toute solution f du problème est solution d'une équation différentielle du second ordre.
3. Conclure.

Couplage n°2

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent chacune une loi géométrique de paramètre p (loi du nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès dans une série illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p , où $0 < p < 1$).

1. Calculer la probabilité $P(X \geq a)$, pour a entier positif.
2. Soit m un entier naturel non nul. Calculer $P(X \geq mY)$ et en donner un équivalent simple quand m tend vers $+\infty$.
3. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune a boules blanches et b boules rouges, dans lesquelles on effectue des tirages d'une boule avec remise. Déterminer la probabilité qu'il faille faire au moins deux fois plus (au sens large) de tirages dans l'urne U_1 que dans l'urne U_2 pour obtenir la première boule blanche.

Exercice 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B = A - I_3$ (où I_3 désigne la matrice diagonale d'ordre 3 dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1).

1. Exprimer B^2 en fonction de B .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n , qu'on exprimera en fonction de n , tels que $A^n = a_n B + b_n I_3$.
3. La relation obtenue à la question précédente est-elle encore valable si n désigne un entier strictement négatif?

Convention : Si $n < 0$, A^n est, en cas d'existence, l'inverse de A^{-n} .

Couplage n°3

Exercice 2

Étant donnée une liste de n réels a_1, \dots, a_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et un entier r compris entre 1 et n , on note $u_r(a_1, \dots, a_n)$ le $r^{\text{ième}}$ élément de la liste lorsque qu'on les range dans l'ordre croissant. Ainsi, par exemple,

$$u_1(a_1, \dots, a_n) = \min(a_1, \dots, a_n) \text{ et } u_n(a_1, \dots, a_n) = \max(a_1, \dots, a_n).$$

On considère n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et suivant toutes la même loi uniforme sur $[0, 1]$ et pour tout entier r compris entre 1 et n , on note Z_r la variable aléatoire égale à $u_r(X_1, \dots, X_n)$.

- 1°) Pour tout réel x , on note $N(x)$ le nombre d'indices $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $X_i \leq x$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $N(x)$.
- 2°) Soit $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x \in \mathbb{R}$; Exprimer l'événement $(Z_r \leq x)$ à l'aide de $N(x)$ et déduire de ce qui précède que la fonction de répartition de Z_r est définie sur $[0, 1]$ par

$$F_{Z_r}(x) = \sum_{k=r}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- 3°) Vérifier qu'une densité de Z_r est donnée par $g(x) = \begin{cases} n \binom{n-1}{r-1} x^{r-1} (1-x)^{n-r} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

2) Montrer que les deux sous-espaces $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Ker}(f - 3\text{Id})^2$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

En déduire qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Calculer T^n pour n entier naturel non nul et en déduire A^n .

Couplage n°4

Exercice 2

On rappelle que la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite est donnée par $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt$ pour tout x réel.

On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = c \exp\left(\frac{-(x+y)^2 - y^2}{2}\right)$, avec c un réel.

1. Déterminer c pour que f définisse une densité d'un couple (X, Y) de variables aléatoires.

2. Déterminer $E(X)$ et $E(Y)$.

3. Montrer que $P(X \geq 0 \cap Y \geq 0) = \int_0^{+\infty} (1 - \phi(y)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy$, et calculer cette intégrale.

Exercice 1

Soit r un réel strictement positif. On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + r)}$$

1. Déterminer la valeur de α pour laquelle f est une densité de probabilité. On désignera dans la suite par X une variable aléatoire réelle qui admet cette densité de probabilité.
2. Préciser la fonction de répartition de X . Montrer que X n'admet pas d'espérance.
3. Soit (Ω, \mathcal{A}, P) l'espace probabilisé sur lequel est définie la variable X . On considère la variable aléatoire Y définie par :

$$Y = \ln |X|.$$

Déterminer une densité de Y .

Montrer, sans la calculer, que Y admet une espérance.

Couplage n°5

Exercice 2

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $e_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 0, 0, 1)$.

1. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\text{Im } f$ et déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. Soit $g : \text{Im } f \longrightarrow \text{Im } f$
 $x \longmapsto f(x)$
Justifier brièvement que g est un endomorphisme et écrire la matrice de g dans la base (e_1, e_2) .
3. Déterminer une base de vecteurs propres de g , puis de f .

Exercice 1

Soit f la fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définie par $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit n un entier tel que $n \geq 1$. Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de densité commune f . On note $Y_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer une densité de Y_n .
3. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbf{N}^*$ la variable aléatoire Y_n admet-elle une espérance? Dans ce cas, la calculer.

Couplage n°6

Exercice 2

On définit sur l'espace E des fonctions continues sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et à valeurs dans \mathbf{R} , une application ϕ qui à $f \in E$ associe la fonction $F = \phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2|x-t|)f(t)dt.$$

1.a) Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E dont l'image est contenue dans l'espace des fonctions de classe C^2 sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

(On pourra commencer par décomposer l'intégrale définissant F en deux intégrales ne contenant plus de valeur absolue.)

b) Démontrer que pour tout $f \in E$, $F = \phi(f)$ vérifie $F'' + 4F = 4f$.

c) Comparer $F(\frac{\pi}{2})$ et $F(-\frac{\pi}{2})$ puis $F'(\frac{\pi}{2})$ et $F'(-\frac{\pi}{2})$.

2.a) Le nombre 0 est-il valeur propre de ϕ ?

b) Le nombre 1 est-il valeur propre de ϕ ?

Exercice 1

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
2. On cherche à résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$ l'équation (E) : $M^2 = A$.
Démontrer que si M est une solution de (E), alors A et M commutent (c'est-à-dire $AM = MA$) et tout vecteur propre de A est un vecteur propre de M .
3. En déduire que toute solution de l'équation (E) est diagonalisable et déterminer toutes les solutions de (E).

Couplage n°7

Exercice 2

On considère deux variables aléatoires à valeurs réelles, X et Y , indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.

On note $U = \frac{1}{2}(X + Y)$ et $V = \frac{1}{2}(X - Y)$

1. Calculer l'espérance et la variance de U et de V .
2. Déterminer une densité de probabilité de U
3. Déterminer une densité de probabilité de V .

On rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densité respectives f et g alors $X + Y$ est une variable aléatoire qui admet comme densité h telle que :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

Exercice 1

1°) a) Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur \mathbb{R}^{*+} qui vérifient

$$\forall x > 0, xf'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

b) Déterminer de même toutes les fonctions f de classe C^1 sur \mathbb{R}^{*-} qui vérifient

$$\forall x < 0, xf'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

2°) Montrer qu'il existe une unique fonction f de classe C^1 sur \mathbb{R} qui vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; \text{ on précisera en particulier } f'(0).$$

3°) f étant la fonction trouvée au 2°), calculer $\int_0^1 f(x) dx$.

Couplage n°8

Exercice 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. n véhicules numérotés de 1 à n sont engagés dans un rallye automobile. Pour tout i , on note U_i la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée du véhicule n° i . On suppose que les variables aléatoires U_i sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout réel t de $[0,1]$, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de véhicules déjà arrivés à l'instant t .

Enfin on note T_i l'heure d'arrivée du véhicule classé en i -ème position.

1) Déterminer la loi de N_t .

2) Soit $i \in [1, n]$. Déterminer sous la forme d'une somme la fonction de répartition de T_i

3) Calculer l'espérance de T_i .

Exercice 1

À tout polynôme P à coefficients réels on associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q(X) = (X - 1)(X - 2)P'(X) - 2X.P(X).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si P est un vecteur propre de f alors $\deg(P) = 2$.
3. Déterminer les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) de f .

Couplage n°9

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X ayant f pour densité

2) Soit φ la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Montrer que φ réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, +1[$ et déterminer sa fonction réciproque.

3) On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \varphi(X) = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}$.

Déterminer la fonction de répartition de Y .

Exercice 1

On suppose que le nombre de clients N_t qui entrent dans un certain magasin pendant une unité de temps t ($t > 0$) suit une loi de Poisson de paramètre t (et ne dépend donc que de l'intervalle de temps t) et, pour tout entier naturel non nul n , on note X_n l'instant d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client qui entre dans ce magasin à partir de l'instant $t = 0$.

- 1°) Exprimer l'événement $(X_n \leq t)$ à l'aide de N_t , puis déterminer la loi de X_1 son espérance et sa variance.
- 2°) Déterminer la fonction de répartition de X_n en fonction de n et t en laissant le résultat sous forme de somme et en déduire une densité de X_n .
- 3°) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt$ converge et déterminer sa valeur. La variable X_n possède-t-elle une espérance ?

Couplage n°10

Exercice 2

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère trois points A , B et C de coordonnées respectives $(1, 1)$, (a, a^2) et $(-a^2, a)$ avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

1. Justifier l'existence de la droite (AB) et de la médiatrice du segment $[BC]$ puis montrer que ces deux droites ne sont pas parallèles.
2. Quand on fait varier a , décrire le lieu du point M intersection de la droite (AB) et de la médiatrice du segment $[BC]$.