Banque « Agro -Véto »
A - 0707

PHYSIQUE

Durée : 3 h 30

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

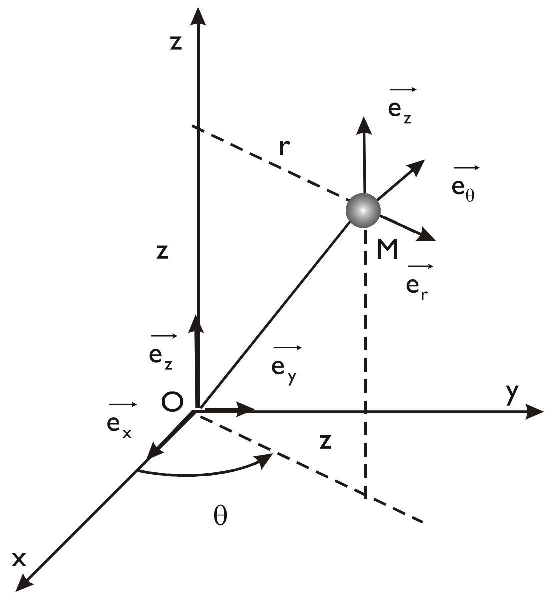
Les problèmes I et II sont indépendants.

I. Cosmologie : Orbitogramme de la Villette

A. Étude cinématique :

On considère un référentiel galiléen associé au repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$, l'axe Oz est vertical ascendant. La position d'un point matériel M sera définie par ses coordonnées cylindriques, $r\left(r>0\right)$, θ et z.

On notera respectivement $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ les vecteurs unitaires déduits de $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$ par rotation d'angle θ autour de Oz.



I.A.1 Exprimer $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique.

I.A.2. En déduire la vitesse $\vec{v}\left(M\right)$ dans cette même base.

I.A.3. Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme :

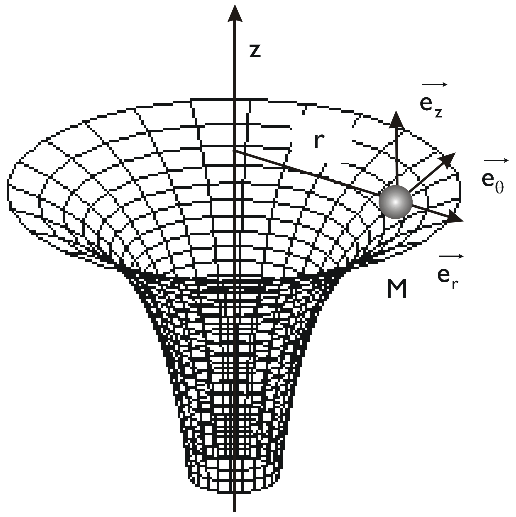
$$\vec{a}\left(M\right)=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\overrightarrow{e_r}+\left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\overrightarrow{e_\theta}+\frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{e_z}$$

I.A.4. Montrer que $\vec{a}.\overrightarrow{e_\theta}$ peut s'écrire aussi : $\vec{a}.\overrightarrow{e_\theta}=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$

T.S.V.P.

B. Étude dynamique et énergétique :

On étudie le mouvement d'une bille d'acier M, de masse m assimilée à un point matériel sur une surface de révolution. La surface sur laquelle roule la bille est engendrée par la révolution d'une portion d'hyperbole, $z = \frac{-k}{r}, k > 0$. La bille se comporte sur cette surface comme un corps céleste soumis à une force de gravitation.



I.B.1 Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par un point M_1 de masse m_1 sur un point M_2 de masse m_2. On notera $r = M_1M_2$ la distance entre les points et $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{r}$ le vecteur unitaire orienté de M_1 vers M_2.

I.B.2. Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle dont on établira l'expression. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

On revient à l'étude de la bille.

On néglige les frottements. La réaction normale du support sera notée : $\overrightarrow{R_N} = R_r\overrightarrow{e_r} + R_\theta\overrightarrow{e_\theta} + R_z\overrightarrow{e_z}$.

I.B.3 Justifier sans calcul que $R_\theta = 0$.

I.B.4 Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille. Préciser si ces forces dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de l'énergie potentielle associée en fonction de la variable r uniquement . On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

I.B.5 Ecrire le principe fondamental de la dynamique et faire la projection dans la base cylindrique. En déduire que la quantité $r^2\frac{d\theta}{dt}$ est une constante notée C.

I.B.6 Exprimer l'énergie mécanique sous la forme :
$E_m = \frac{1}{2}m\alpha(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$. Préciser $\alpha(r)$ en fonction de k et r.
Que peut-on dire de l'énergie mécanique ?

I.B.7 On peut donc définir une énergie potentielle effective $E_{peff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}$ .Tracer l'allure de la courbe $E_{peff}(r)$.
En fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale du système E_0, discuter le caractère lié ou libre du mouvement.

I.B.8 Pour quelle valeur de r a-t-on un mouvement circulaire ?
On exprimera le rayon du mouvement circulaire r_c en fonction de C, g et k.

I.B.9 On lance la bille d'une distance r_0 avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$.
Préciser la direction et le module de $\overrightarrow{v_0}$ pour avoir un mouvement circulaire.

II. Thermodynamique appliquée au corps humain

II.1. Équation de diffusion thermique :

On considère un corps homogène (figure 1, où les parties grisées représentent un isolant thermique) de section droite S, de longueur L. La conductivité thermique du milieu est notée λ .

On se place désormais, jusqu'à mention contraire (c'est à dire jusqu'à la question II.6.7 incluse) en régime permanent.

La température du matériau ne dépend que de x et sera notée $T(x)$. Les parois parallèles à l'axe x sont isolées thermiquement et on note $\vec{j}(x) = j(x)\vec{e_x}$, le vecteur densité volumique de courant thermique et $\vec{e_x}$ un vecteur unitaire.

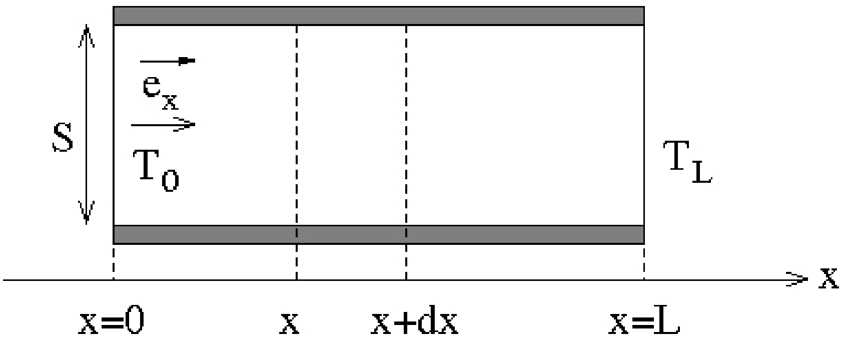


figure 1

II.1.1. Déterminer l'unité de $j(x)$ et rappeler sa signification physique.

II.1.2 Rappeler la loi de Fourier.

II.1.3. Déterminer l'unité de λ .

II.1.4. En effectuant un bilan énergétique pour un volume élémentaire de matériau compris entre les abscisses x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$, établir l'équation vérifiée par $j(x)$. En déduire l'équation vérifiée par $T(x)$.

II.1.5. Donner les lois de variation $T(x)$ et $j(x)$ en supposant que les extrémités du matériau sont maintenues à températures constantes, $T(0) = T_0$ et $T(L) = T_L$. Si $T_0 > T_L$, quel est le signe de j ? Justifier.

II.2. Résistance thermique due à la conduction :

On définit P_{th} le flux thermique à travers la section droite S du matériau, c'est à dire l'énergie qui traverse la surface par unité de temps. On définit R_{th}, résistance thermique de conduction du matériau de longueur L et de surface S, par la relation $T_0 - T_L = R_{th}P_{th}$.

II.2.1 En écrivant la loi d'Ohm locale, préciser l'analogie qui existe entre le problème de la conduction électrique et celui de la conduction thermique. Quelle est la grandeur électrique équivalente à P_{th} ? Quelle est la grandeur électrique équivalente à $T(0) - T(L)$?

II.2.2 Comment sont reliés P_{th} et $j(x)$?

T.S.V.P.

II.2.3 Exprimer R_{th} en fonction de L, S et λ . Préciser l'unité de R_{th} .

II.3 Association de résistance thermique:

II.3.1 On associe deux corps A_1 et A_2 (figure 2, où les parties grisées représentent un isolant thermique) de résistances thermiques R_{th_1} et R_{th_2} de même section S, l'un de conductivité thermique λ_1 est compris entre $x_0 = 0$ et $x_1 = L_1$, le second de conductivité thermique λ_2 est compris entre $x_1 = L_1$ et $x_2 = L_1 + L_2$. On note T_0, T_1 et T_2 les températures pour $x_0 = 0$, $x_1 = L_1$, $x_2 = L_1 + L_2$.

II.3.2

II.3.2.a Justifier que la puissance thermique P_{th1} qui traverse A_1 est égale à la puissance thermique P_{th2} qui traverse A_2. Indiquer alors, en la justifiant, une analogie avec un problème d'électrocinétique.

II.3.2.b Établir l'expression de la résistance thermique R_{th} (qu'on définit par la relation : $T_0 - T_2 = R_{th}P_{th}$) de l'ensemble en fonction de R_{th_1} et R_{th_2}.

II.3.2.c En déduire la température T_1 en fonction de T_0 ,T_2 et R_{th_1} et R_{th_2}.

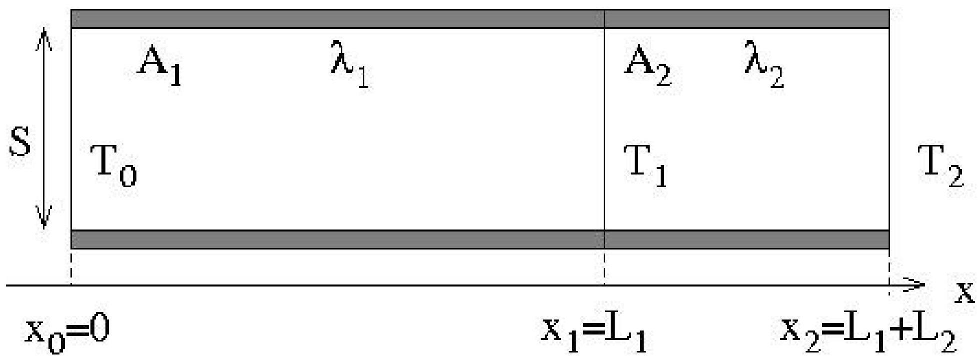


figure 2

II.3.3. Les deux corps A_1, de section S_1 et de longueur L_1 et A_2 de section S_2 et de longueur L_2 sont associés en « parallèle » (figure 3,où les parties grisées représentent un isolant thermique). On note T_0, la température sur les faces d'entrée pour $x_0 = 0$ et T_1, la température sur les faces de sorties ($x_1 = L_1$ pour A_1, et $x_2 = L_2$ pour A_2). Les corps A_1 et A_2 sont isolés latéralement.

Établir l'expression de la résistance thermique R_{th} (qu'on définit par la relation : $T_0 - T_1 = R_{th}P_{th}$, P_{th} étant la puissance thermique traversant l'ensemble des surfaces S_1 et S_2 à l'abscisse $x_0 = 0$) de l'ensemble en fonction de R_{th_1} et R_{th_2}.

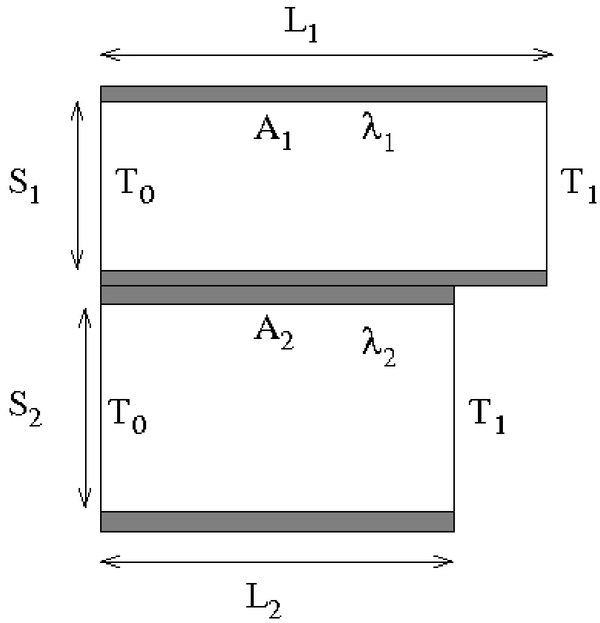


figure 3

Indiquer, en la justifiant, une analogie avec un problème d'électrocinétique.

II.4. Transfert convectif :

Un corps de température T, plongé dans un fluide (ici, de l'air) à la température T_a, échange avec celui-ci par convection au niveau de sa surface S une puissance thermique P_{th} sortant algébriquement du corps : $P_{th} = \alpha S(T - T_a)$ avec $\alpha = 4\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. On gardera cette valeur de α dans la suite du problème. Nous sommes toujours en régime permanent.
Par analogie au cas précédent, montrer que cet échange convectif est décrit par une résistance thermique de convection R_{thc} que l'on précisera.

II.5. Transfert radiatif :

Un corps de température T, plongé dans un fluide (ici, de l'air) à la température T_a, échange avec celui-ci par rayonnement au niveau de sa surface S une puissance thermique P_{thr} sortant algébriquement du corps : $P_{thr} = KS(T - T_a)$ avec $K = 5\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ (relation approchée valable si l'écart de température est faible) . Ce mécanisme provient du rayonnement infrarouge émis par le corps et les murs à une température donnée. On est toujours en régime permanent.

Par analogie avec le cas précédent montrer que cet échange radiatif est aussi décrit par une résistance thermique de rayonnement R_{thr} que l'on précisera.

II.6. Étude du corps humain :

Nous allons étudier le maintien de l'homéothermie chez l'homme debout nu et au repos à l'exposition d'une température confortable. La surface du corps humain $S = 1{,}5\ \mathrm{m^2}$ est modélisable par une isotherme à $T = 33°C$. La température de la pièce est prise à $T_a = 23°C$. Nous nous plaçons en régime permanent.
Les échanges thermiques s'effectuent par :

- radiation (1)
- convection (2)
- évaporation (3)

Ces pertes sont compensées par la production métabolique. En moyenne, un homme produit 13000 kJ par jour.

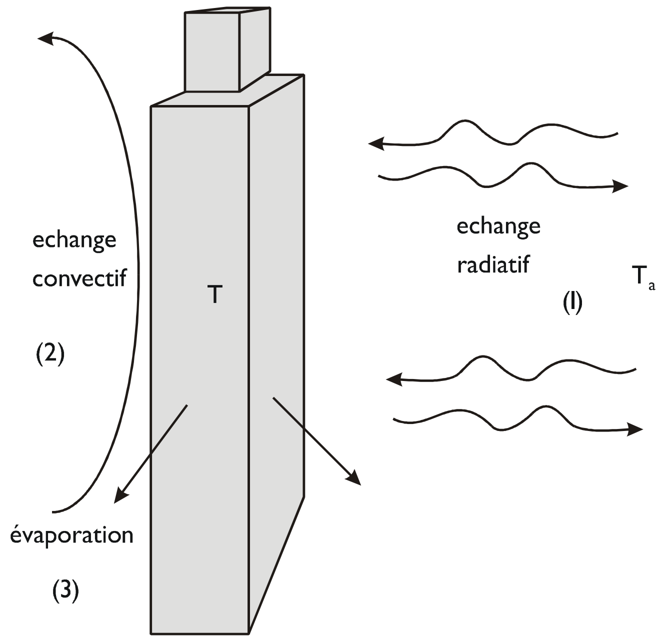


figure 4

II.6.1 Évaluer la puissance P_M fournie par le métabolisme.

II.6.2 Évaluer la résistance thermique de rayonnement R_{thr} pour un homme. Exprimer et évaluer la puissance P_r émise par rayonnement.

II.6.3 Évaluer la résistance thermique de convection R_{thc} pour un homme. Exprimer et évaluer la puissance P_c émise par conduction.

T.S.V.P.

II.6.4. L'organisme émet toujours de l'eau par les voies respiratoires et sa surface cutanée. Evaluer cette puissance P_E si la chaleur latente de changement d'état à la température de la peau est $L \approx 2400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et que la masse d'eau vaporisée est de $m = 300$ g.jour^{-1}.

II.6.5. À partir d'un bilan de puissance, en déduire la puissance résiduelle P_{res} servant à réchauffer l'air inspiré, etc…

II.6.6

II.6.6.a Soit le circuit électrique de la figure 5, préciser l'équation reliant les différentes grandeurs électriques de ce circuit.

II.6.6.b En vous inspirant de la question II.2.1, en déduire que le système thermique étudié est équivalent au circuit électrique de la figure 5 ci-dessous. En recopiant le schéma électrique, indiquer clairement les équivalents thermiques correspondants aux divers éléments électriques introduits.

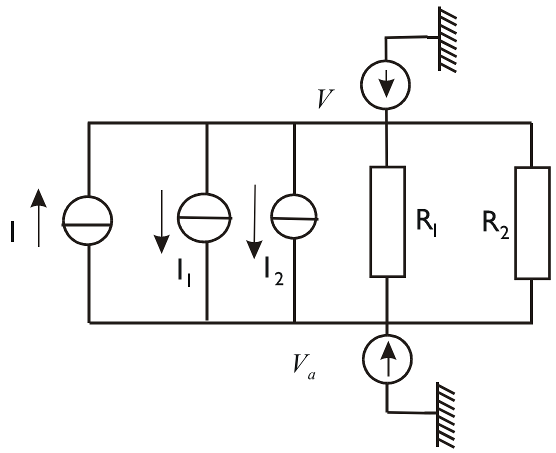


figure 5

II.6.7.a Un homme habillé a 80% de sa surface recouverte d'un vêtement. On néglige le rayonnement et la convection des vêtements, si bien que ne subsiste plus que la conduction au travers de ces vêtements.
Expliquer d'une part pourquoi cela va nécessiter d'introduire, dans le schéma précédent, une résistance supplémentaire R_3 et d'autre part comment il faut modifier les valeurs des résistances R_1 et R_2. Nous noterons R_1' et R_2' les nouvelles valeurs des résistances remplaçant R_1 et R_2 .
Donner le lien de R_1' et R_2' avec R_1 et R_2.
Modifier à nouveau le schéma de la figure 5 pour tenir compte de ces résistances.

II.6.7.b. Exprimer la résistance thermique des vêtements R_{vet} conduisant à la même puissance du métabolisme dans une pièce à la température $T_a' = 20^\circ C$.

II.6.8. On revient à l'homme nu. La pression de la pièce est supposée constante et égale à $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. On tient compte de la capacité thermique à pression constante, C du corps humain. On admet que les relations $R_{th}P_{th} = \Delta T$ restent valables en régimes lentement variables.

II.6.8.a En faisant un bilan énergétique entre deux instants t et $t+dt$, sur le corps humain à une température uniforme, $T(t)$, préciser :

- la variation d'énergie interne, dU en fonction de C et T.
- le transfert thermique dû au rayonnement δQ_r en fonction de R_{thr}, T_a , T et du temps t.
- le transfert thermique dû à la convection δQ_c en fonction de R_{thc}, T_a, T et du temps t.
- les transferts thermiques dus au métabolisme, à l'évaporation et les pertes résiduelles en fonction des puissances respectives et du temps t. On prêtera attention au sens des transferts.

En déduire que l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ s'écrit : $\frac{dT}{dt} = \frac{(T - T_a)}{\tau} + B$.

II.6.8.b Exprimer τ en fonction de la capacité thermique à pression constante, C et des résistances thermiques de convection R_{thc} et de rayonnement R_{thr}.

II.6.8.c Exprimer B en fonction des différentes puissances précédemment définies.

II.6.8.d Redessiner le schéma de la figure 5 en le modifiant pour tenir compte de cette capacité.

II.6.9 Sachant qu'un corps dans l'eau se refroidit 25 fois plus vite que dans l'air, estimer la résistance convective R_{thc_eau} du corps humain dans l'eau. On admettra que la résistance de rayonnement n'est pas modifiée.

II.7. Étude expérimentale

Pour vérifier que le corps humain est le siège d'un transfert thermique, on enferme N=36 personnes dans une pièce parallélépipédique pendant 2 heures et on enregistre la température de la pièce au cours du temps en présence et en l'absence de ces mêmes personnes. La température des murs est égale à celle de l'air de la pièce. La puissance émise par *une personne* est du type $P = \beta\left(T_{peau} - T\right)$. De même, une partie de l'énergie de la pièce est perdue par fuites avec l'extérieur. Cette puissance perdue P_f est modélisée par $P_f = \beta'(T - T_{ext})$. La pression de la pièce est supposée constante et égale à $P_0 = 10^5\,\text{Pa}$.

II.7.1 Exprimer et évaluer C_{pa}, la capacité thermique à pression constante de l'air de la pièce sachant que les dimensions sont $\ell = 7{,}5\text{ m}$, $L = 10\text{ m}$ et $h = 4\text{ m}$. L'air est assimilé à un gaz parfait diatomique pour lequel $\gamma = 1{,}4$. La température sera prise égale à 20°C et on admettra que C_{pa} restera constant dans la suite du problème.
On admet que la capacité thermique des murs et des objets est d'environ $C_m = 3\times 10^5\,\text{J.K}^{-1}$ et celle des personnes est négligée. De plus, on considère qu'à chaque instant t, la température $T(t)$ des murs et de la pièce est uniforme.

T.S.V.P.

II.7.2 En faisant un bilan énergétique entre deux instants t et $t+dt$, sur la pièce à une température uniforme, $T(t)$, préciser :

- la variation d'enthalpie, dH en fonction de C_m , C_{pa} et T ,
- le transfert thermique reçu, δQ_1 dû aux pertes en fonction de β', T_{ext} , T et du temps *t*,
- le transfert thermique reçu, δQ_2 dû aux N personnes en fonction de β , N, T_{peau} , T et du temps *t*.

En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température de la pièce sous la forme $\frac{dT}{dt}+\frac{T}{\tau}=\frac{T_\infty}{\tau}$

a) en présence de N personnes,
b) en l'absence de ces même personnes.

Exprimer dans les deux cas les expressions de τ et T_∞ en fonction de $C_{pa}, C_m, N, \beta, \beta'$, T_{peau} et T_{ext} .

II.7.3 En déduire l'expression de la température (On ne demande pas de déterminer les constantes d'intégration)

a) en présence de N personnes
b) en l'absence des personnes.

II.7.4 La modélisation des températures enregistrées exprimées en °C donne :

a) $\theta = 23,0 - 3,0\exp(-t/2000)$ en présence de personnes,
b) $\theta = 21,0 - 1,0\exp(-t/2400)$ en l'absence de personnes. Le temps est exprimé en secondes.

En déduire β et β' , T_{ext} et T_{peau} . Comparer aux résultats du paragraphe II.6 et conclure.

FIN DU SUJET