

Couplage n°1

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles définies sur \mathbb{R}^{+*} , de degré inférieur ou égal à 4, fonction nulle comprise. On considère l'application φ qui à toute fonction P de E associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur \mathbb{R}^{+*} par: $\varphi(P)(x) = P(x) + 2x^4 P(1/x)$.

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- 2) Exprimer φ^2 en fonction de φ et de l'identité. En déduire une relation vérifiée par les valeurs propres de φ . Montrer que φ est inversible et déterminer son inverse.
- 3) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ . L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

Exercice 2

Un joueur vise une cible avec une fléchette. A chaque lancer, il atteint la cible avec la probabilité p , $0 < p < 1$ et la rate avec la probabilité $q = 1 - p$.

Il effectue une série de lancers indépendants.

Il gagne, lorsque, pour la première fois, sur n lancers, le nombre de fois où il atteint la cible excède de 2 le nombre de fois où il la rate.

Il perd, lorsque, pour la première fois, sur n lancers, le nombre de fois où il rate la cible excède de 2 le nombre de fois où il l'atteint.

La partie s'arrête lorsque le joueur a gagné ou perdu.

On note les événements suivants A_n : "le joueur gagne au n -ème lancer", B_n : "le joueur perd au n -ème lancer", A : "le joueur gagne la partie" et B : "le joueur perd la partie".

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. En déduire $P(A)$ et $P(B)$. Déterminer la probabilité pour que la partie dure indéfiniment.
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers que comporte la partie. Déterminer la loi de X . En déduire l'espérance et la variance éventuelle de X .

Couplage n°2

Exercice 1

Deux amis Pierre et Paul jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel n . Si cet entier n est impair, Paul donne n euros à Pierre, on considère que Pierre a gagné. Si cet entier n est pair, Pierre donne n euros à Paul, on considère que Pierre a perdu. Si n est nul, rien ne se passe, on considère que la manche est nulle. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre obtenu à chaque sollicitation, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a ($a > 0$).

On note enfin : A : « Pierre gagne », B : « Pierre perd », C : « la manche est nulle » et $p = P(A)$, $q = P(B)$ et $r = P(C)$,

1. Déterminer r , $p+q$ et $p-q$.
2. En déduire p et q .
3. Calculer l'espérance du gain de Pierre.

Exercice 2

Soit Φ la fonction définie par

$$\Phi(x) = \int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin} \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos} \sqrt{t} dt$$

1. Quel est son domaine de définition? Calculer $\Phi(x + \pi) - \Phi(x)$.
2. Justifier que Φ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Calculer $\Phi(\frac{\pi}{4})$ et en déduire les valeurs de $\int_0^1 \operatorname{Arcsin} \sqrt{t} dt$ et de $\int_0^1 \operatorname{Arccos} \sqrt{t} dt$.

Couplage n°3

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et préciser $f'(x)$ pour $x > 0$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en zéro. On notera \tilde{f} le prolongement obtenu. Ce prolongement est-il dérivable en zéro ?
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction \tilde{f} . En déduire l'allure de la représentation graphique de \tilde{f} au voisinage du point d'abscisse zéro.

Exercice 2

Soient (X_1, \dots, X_n) une famille de variables aléatoires réelles indépendantes uniformes sur $[0, a]$ ($a > 0$), $U = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $V = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. (a) Déterminer une densité f_U de U .
(b) La variable aléatoire U admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.
2. (a) Déterminer une densité f_V de V .
(b) La variable aléatoire V admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.

Couplage n°4

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, a]$.

Soit φ l'application qui, à f élément de E , associe F telle que :

$$\forall x \in [0, a], F(x) = \int_0^a f(t) \sin(x+t) dt$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer $\text{Im } \varphi$.
3. Pour $a = 2\pi$, montrer que 0 est valeur propre de φ .

Exercice 2

Soient $a \geq 0, b \geq 0$ et F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \begin{cases} \frac{a(x+4)}{|x|+b} & \text{si } x > -4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. A quelles conditions, portant sur a et b , la fonction F est-elle une fonction de répartition d'une variable aléatoire X ?
On suppose dorénavant ces conditions réalisées. Représenter le graphe de la fonction F .

2.a) Montrer que X est une variable à densité et préciser une densité.

b) Pour quelles valeurs de a et b , la variable X admet-elle des moments de tous ordres? Calculer l'espérance et la variance de X quand elles existent.

Couplage n°5

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé, on considère les deux points A et B de coordonnées : $A(2;1;0)$ $B(3;0;0)$. Le point M de coordonnées $M(0;0;\alpha)$ est un point variable de l'axe Oz . Dans le triangle OAB , on appelle H le pied de la hauteur issue de A et dans le triangle ABM , on appelle P le pied de la hauteur issue de A .

1. Donner les coordonnées du point H et calculer les coordonnées du point P en fonction de α . Montrer que les droites (HP) et (MB) sont orthogonales.
2. En déduire que lorsque le point M varie, le point P appartient à un cercle fixe du plan Oxz , et on précisera une équation de ce cercle.
3. Montrer que les plans (AHP) et (MAB) sont orthogonaux.

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes deux une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

On note : $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. En déduire la loi de U et celle de V .
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Couplage n°6

Exercice 1

Une secrétaire effectue n appels vers n correspondants distincts (n est un entier naturel supérieur ou égal à 2). À chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est $1/3$. On note X le nombre de clients obtenus. Après ces n recherches, la secrétaire rappelle une deuxième fois, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenu la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus lors de la deuxième série d'appels, et Z le nombre total de correspondants obtenus au cours des deux séries d'appels (on a donc $Z=X+Y$).

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X .
2. Montrer que Z suit une loi binomiale de paramètres à déterminer.
3. On suppose désormais que le nombre de correspondants que la secrétaire cherche à joindre au cours de ses deux séries d'appels suit une loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer dans ce cas la loi de Z .

Exercice 2

1. Soit la matrice carrée d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - 3I$, I étant la

matrice identité d'ordre 3. Déterminer un réel α tel que $B^2 = \alpha B$ et exprimer B^k pour tout entier naturel k .

2. Calculer, pour tout entier naturel n , A^n en fonction de A et de I .
3. On appelle C_n la matrice obtenue en remplaçant n par $-n$ dans l'expression de A^n en fonction de A et de I , obtenue à la question précédente. Cette matrice est-elle l'inverse de A^n ?

Couplage n°7

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} e^{-t} dt$ et $J_n = \int_0^1 (1-t)e^{-t} \ln(1+t^n) dt$.

1. Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Indication : on pourra utiliser le fait que : $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.

2. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = \frac{\ln 2}{en} - \frac{1}{n} J_n$.
3. Dédire de ce qui précède la limite de la suite (I_n) ainsi qu'un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Une urne contient b boules blanches, n boules noires et r boules rouges; b et n sont des entiers naturels non nuls; r est un entier naturel. Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne; si elle est noire, il perd; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le deuxième tirage, il reste donc $r-1$ boules rouges dans l'urne). Dans ce cas, si la boule tirée est blanche, il gagne; si elle est noire, il perd; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un troisième tirage; etc...

1) On note B_i (respectivement N_i, R_i) l'événement: "le joueur tire une boule blanche (respectivement noire, rouge) lors du $i^{\text{ème}}$ tirage". On note G_r l'événement: "le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges".

a) Calculer $P(G_0)$ et $P(G_1)$.

b) Trouver une relation entre $P(G_r)$ et $P(G_{r-1})$.

c) Calculer $P(G_r)$.

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève (sur une victoire ou sur une défaite), l'urne contenant au départ 2 boules rouges.

Déterminer la loi de X .

Couplage n°8

Exercice 1

On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par

$$H_m = \begin{pmatrix} -1 - m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3 - m \end{pmatrix}$$

On note h_m l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté par H_m dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que 1 est une valeur propre commune à tous les endomorphismes h_m . On cherchera les sous-espaces propres associés. Déterminer un vecteur v_1 commun à ces espaces.
2. On note $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$. Vérifier que (v_1, v_2, v_3) forment une base de \mathbb{R}^3 et donner la matrice de h_m dans cette base.
3. Pour quelles valeurs de m h_m est-elle diagonalisable?

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité $f(x, y) = ke^{-\left(x^2 - xy + \frac{y^2}{2}\right)}$

1. Déterminer la valeur de la constante réelle k et déterminer les lois de X et de Y .
2. Calculer la covariance de X et de Y . X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Soit Φ la fonction de répartition de Y . Déterminer une densité de $Z = \Phi(Y)$.

Couplage n°9

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée α_n .
- 2.a) Démontrer que $\alpha_n \geq e^n$.
- 2.b) Démontrer que α_n est équivalent à e^n en $+\infty$.
3. On pose : $\alpha_n = e^n(1+\varepsilon(n))$. Démontrer que $\varepsilon(n)$ est équivalent en $+\infty$ à ne^{-n} .
Démontrer qu'il existe une fonction ε_1 telle que $\alpha_n = e^n + n + n\varepsilon_1(n)$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_1(n) = 0$.

Exercice 2

1. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, dans quel(s) cas la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable?

2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers, indépendantes et de même loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

a) Donner la loi de $X + Y$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

b) Calculer la probabilité pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable; puis la probabilité pour que la matrice A soit inversible.

Couplage n°10

Exercice 1

Un voyageur se promène à l'intérieur du train Paris-Romorantin qui comporte quatre voitures. Tous les quarts d'heure il passe d'une voiture à l'une des voitures qui la jouxtent (choisissant au hasard et de manière équiprobable lorsqu'il y en a deux). Son choix ne dépend aucunement des positions précédentes. Les voitures sont numérotées de 1 à 4 à partir de la voiture de tête.

Soit X_n le numéro de la voiture où il se trouve au temps $t = n$ (exprimé en quarts d'heures). On suppose qu'au départ ($t = 0$) il se trouve dans la voiture de tête. On note $p_{i,n} = P\{X_n = i\}$ et on pose $\pi_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, p_{3,n}, p_{4,n}) \in \mathbb{R}^4$.

1. Exprimer matriciellement π_{n+1} en fonction de π_n . En déduire une expression de π_{n+2} en fonction de π_n .

2. a) Que peut-on dire des suites $p_{2,2n}, p_{4,2n}$? Déterminer les suites $p_{1,2n}, p_{3,2n}$ [on pourra regrouper les coordonnées deux par deux de manière appropriée].

b) Déterminer les suites $(p_{i,n})_n$. Ces suites ont-elles une limite lorsque $n \rightarrow \infty$?

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

1. Démontrer que si f et g tendent vers $+\infty$ ou vers 0^+ quand $x \rightarrow +\infty$ et qu'elles sont équivalentes en $+\infty$, alors $\ln f$ et $\ln g$ sont aussi équivalentes en $+\infty$.

2. En déduire la limite de $\frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$, quand x tend vers $+\infty$.

3. Donner un contre exemple à l'implication : $f \sim g$ en $+\infty \Rightarrow \ln f \sim \ln g$ en $+\infty$.