Oral Mathématiques 2008 1er couplage

Exercice 1

Une société de distribution reçoit des produits. Chaque produit se trouve dans une boîte et on suppose que certaines boites peuvent être détériorées pendant le transport. De plus, on suppose que lorsque la boîte est détériorée, la probabilité que le produit soit invendable est 1/6. Soit X le nombre de produits invendables parmi les produits reçus.

1. On suppose que la société reçoit 6 boîtes détériorées. Déterminer la loi de X.
2. On suppose que le nombre de boîtes détériorées reçues suit une loi de Poisson. On note Y le nombre de boîtes détériorées.
   a. Déterminer son paramètre si $P(Y=5)=P(Y=6)$.
   b. Soit n un entier naturel. Déterminer $P((X=k)\cap(Y=n))$.
   d. En déduire la loi de X.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

1.a) Etudier les variations de f et représenter sur le même graphique son graphe et la droite d'équation $y=x$.
b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et étudier graphiquement son comportement.
c) Dans le cas où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, préciser sa limite.

2.a) Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0>1$.
b) Etudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0<1$.
Quand $u_0<1$, on pourra distinguer le cas où il existe $p\in\mathbb{N}$, tel que $u_p\leqslant -1$ et le cas contraire.

Oral Mathématiques 2008 2^{eme} couplage

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n , $n \geq 3$, de base canonique notée B= $(e_1,e_2, \ldots, e_n)$et $\forall$ k $\in [\![1;n]\!]$, $f_k=(\sum_{i=1}^{n} e_i)-e_k$.

1. Démontrer que la famille $B_1=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice de passage P de B à B_1.
3. Déterminer la matrice de passage P^{-1}.(On exprimera les vecteurs e_k en fonction des vecteurs f_k sous une forme similaire à celle de l'expression des f_k en fonction des e_k donnée dans l'énoncé).

Exercice 2

On rappelle que pour tout couple (U, V) de variables aléatoires indépendantes de densité respectives f_U et f_V la variable $W = U + V$ admet une densité f_W définie pour tout $w \in \mathbb{R}$, par :

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(w-t)\, dt$$

On choisit 2 nombres aléatoires X et Y dans $[0,1]$ de façon uniforme et indépendante. On définit W par $W = 1$ si $XY \leq \frac{1}{2}$ et $W = 0$ sinon.

1. Déterminer une densité de $\ln X + \ln Y$.
2. En déduire la probabilité pour que $\ln X + \ln Y \leq -\ln 2$. Préciser alors la loi de W.
3. On dispose d'un programme écrit dans votre langage de programmation préféré (par exemple, SCILAB ou MATLAB) permettant de simuler l'expérience et renvoyant W. On l'exécute n fois de manière indépendante, parmi ces n expériences, le programme renvoie k fois 1 et donc $n-k$ fois 0. Proposer une valeur approchée α_n de $p = P(W=1)$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(|\alpha_n - p| > \varepsilon)$.

Exercice 1

1. On jette un dé ordinaire. Soit T le nombre nécessaire de jets pour obtenir un as. Quelle est la loi de T ? son espérance et sa variance ?

2. On jette 4 dés ordinaires. S'il sort des as on met les dés correspondants de côté et on jette les dés restants une seconde fois. On met à nouveau de côté les dés qui présentent l'as et on jette à nouveau les autres, etc. La partie est terminée lorsque tous les as sont sortis. Pour $i = 1, \dots 4$ soit T_i le nombre de tours nécessaire pour obtenir un as avec le dé numéro i. Soit N le nombre de tours nécessaire pour terminer la partie.

a) Déterminer la loi de N.

b) Calculer l'espérance de N.

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

1. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?
Si la tangente au graphe de f en O existe, en donner une équation et préciser la position du graphe de f par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.

2.a) Montrer que pour tout $x > 0$, le nombre dérivé $f'(x)$ s'écrit sous la forme $f'(x) = 2xa(x)$ où a est une fonction dont on étudiera le signe. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
b) Étudier les branches infinies de f.
c) Donner l'allure du graphe de f.

Oral Mathématiques 2008 — 4^{eme} couplage

Exercice 1

1) Soit α un nombre réel. Donner, en fonction de α, l'ensemble des solutions de l'inéquation d'inconnue x : $x^2 + x + 1 - \alpha \leq 0$. Lorsque l'intervalle I des solutions est non vide, préciser la position de cet intervalle par rapport à l'intervalle $[\,0\,,\,1\,]$.
2) La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[\,0\,,\,1\,]$. Préciser sa fonction de répartition, F. On pose $Y = X^2 + X + 1$. Donner la fonction de répartition G de cette variable aléatoire Y. En déduire une densité de Y.
3) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire en utilisant cette densité. Retrouver cette espérance en utilisant la définition de Y.

Exercice 2

n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout P dans E on pose : $f(P) = (X^2+1)P'' - 2XP'$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E et trouver la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ de E.

En déduire l'ensemble des valeurs propres de f et le cardinal de cet ensemble.

Q2. Montrer que : $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}_3[X]$, puis en donner une base. Déterminer $\operatorname{Ker}(f + 2Id_E)$.

Q3. f est-il diagonalisable ?

Oral Mathématiques 2008 5^{eme} couplage

Exercice 1

Un point M se déplace dans un plan muni d'un repère orthonormé (O,i,j) .Au départ,, M est au point O. A chaque instant il se déplace d'un pas dans l'une des quatre directions $(i,-i,j,-j)$. Ses coordonnées après n déplacement sont des variables aléatoires réelles X_n, Y_n.

1. Calculer $P(X_n = n)$, $P(Y_n = n)$, $P(X_n = n \cap Y_n = n)$. X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
2. Trouver une relation entre $E(X_n^2)$ et $E(X_{n+1}^2)$. Calculer $E(X_n^2)$.
   (On pourra poser $X_{n+1} = X_n + U$ où U est une variable aléatoire réelle à préciser)
3. Calculer $P(X_n = 0 \cap Y_n = 0)$

Exercice 2

On considère le problème suivant : Trouver les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = \dfrac{x}{2} + 3$.

1. Déterminer les applications du type $f : x \longmapsto ax + b$ avec a et b réels, solutions de ce problème.

2. Soit $\varphi : x \longmapsto \dfrac{x}{2} + 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{[n]} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ si $n = 0$ et $\varphi^{[n]} = \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ n fois sinon.
Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, remarquer que la suite $(\varphi^{[n]}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique et en déduire son terme général en fonction de x et n.

3.a) Soit f solution du problème.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$ et en déduire à l'aide de **2.** que f' est constante.
b) Résoudre le problème posé.

Oral Mathématiques 2008 6 eme couplage

Exercice 1

Pour tout entier $n > 0$ on pose

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$$

1. Montrer que la suite u_n est monotone. Est-elle convergente ?

2. a) Comparer u_n et v_n pour tout n ; montrer qu'il existe une constante C telle que

$$u_n - v_n \leq \frac{C}{n}$$

b) La suite v_n converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 2

1) On dispose de deux dés, un rouge et un bleu, que l'on supposera équilibrés. On effectue une succession de lancers de chacun des deux dés. On appelle X le nombre de lancers nécessaires pour que le dé rouge amène un « six » et Y le nombre de lancers nécessaires pour que le dé bleu amène un « six ». Préciser les lois de ces deux variables aléatoires, leurs espérances et leurs variances. Calculer, pour tout entier naturel n, $P(X > n)$

2) On définit $S = \min(X, Y)$ (le nombre de lancers nécessaires pour que l'un des dés amène un « six »), et $T = Y - X$. Calculer $P(S > n)$ et en déduire la loi de S. Préciser son espérance. Calculer pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier relatif r, $P[(S = n) \cap (T = r)]$, en fonction du signe de r. En déduire la loi marginale de T.

3) Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ? Vérifier que $\sum_{n \in Z} P(T = r) = 1$.

Calculer l'espérance et la variance de T.

Oral Mathématiques 2008 7^{eme} couplage

Exercice 1

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction polynôme à coefficients entiers. On considère la fonction polynôme : $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$h:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{x^n g(x)}{n!}\end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel k, $h^{(k)}(0)$ est entier
2. On suppose que π^2 est rationnel, de sorte qu'il existe deux entiers naturels non nuls tels que $\pi^2=\dfrac{a}{b}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

   $$f_n:\begin{cases}[0;1]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}\end{cases} \qquad \text{et} \qquad I_n=\pi a^n\int_0^1 f_n(x)\sin(\pi x)dx$$

   Montrer que I_n est un entier.
3. Conclure

Exercice 2

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi :

$$\forall\, k\in \mathbb{N}^*,\ P(X_i=k)=(1-p)^{k-1}p \qquad (p\in\,]0,1[).$$

On pose : $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer $S_n(\Omega)$ et montrer que : $\forall\, k\in S_n(\Omega)\ \ P(S_n=k)=\dbinom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$.

2. Montrer que la variable $\dfrac{1}{S_n}$ a une espérance finie qu'on note m.

3. Soient n et k deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $k>n$. Calculer $E\left(\dfrac{S_k}{S_n}\right)$ en fonction de n, p, k et m.

Oral Mathématiques 2008 8^{eme} couplage

Exercice 1

Trois personnes, Messieurs A, B et C, se présentent à l'ouverture d'une poste comportant deux guichets. Messieurs A et B accèdent immédiatement à un guichet, et Monsieur C attend qu'un des deux guichets se libère.

On note X, Y et Z les temps de passage aux guichets de Messieurs A, B et C, on suppose que ces variables sont indépendantes et suivent chacune une loi uniforme sur $[0;1]$

1. Déterminer une densité de $U = X - Y$.
2. Montrer que $V = |U|$ est une variable à densité dont on donnera une densité.
3. Quelle est la probabilité que Monsieur C soit la dernière personne à sortir ?

On rappelle la formule suivante : si X et Y sont des variables aléatoires à densité indépendantes admettant pour densité respectivement f et g, alors X+Y admet pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$ et donner une relation entre a_{n+1}, b_{n+1} et a_n, b_n.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser. Retrouver le résultat précédent.
4. Peut-on généraliser la formule précédente à $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 1

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. À quelle condition A est-elle diagonalisable ?

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. On suppose que : $f(F) = F$, $f(G) = G$. Montrer que si les restrictions de f à F et G sont diagonalisables, alors f est diagonalisable.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ matrice M relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle φ a une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où B et C sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En déduire une condition suffisante de diagonalisabilité de M.

Exercice 2

On rappelle que pour tout couple (U, V) de variables aléatoires indépendantes de densité respectives f_U et f_V la variable $W = U + V$ admet une densité f_W définie pour tout $w \in \mathbb{R}$ par :

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(w - t)\, dt$$

1. Déterminer le réel λ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \lambda e^{-|x|}$ soit la densité d'une variable aléatoire réelle.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Déterminer une densité de $-Y$ et reconnaître la loi de $X - Y$.
   La variable aléatoire $X - Y$ admet-elle une espérance et une variance ? Si oui, les calculer.
   (b) Déterminer la loi de $|X - Y|$.

Exercice 1

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ et Γ la courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$:

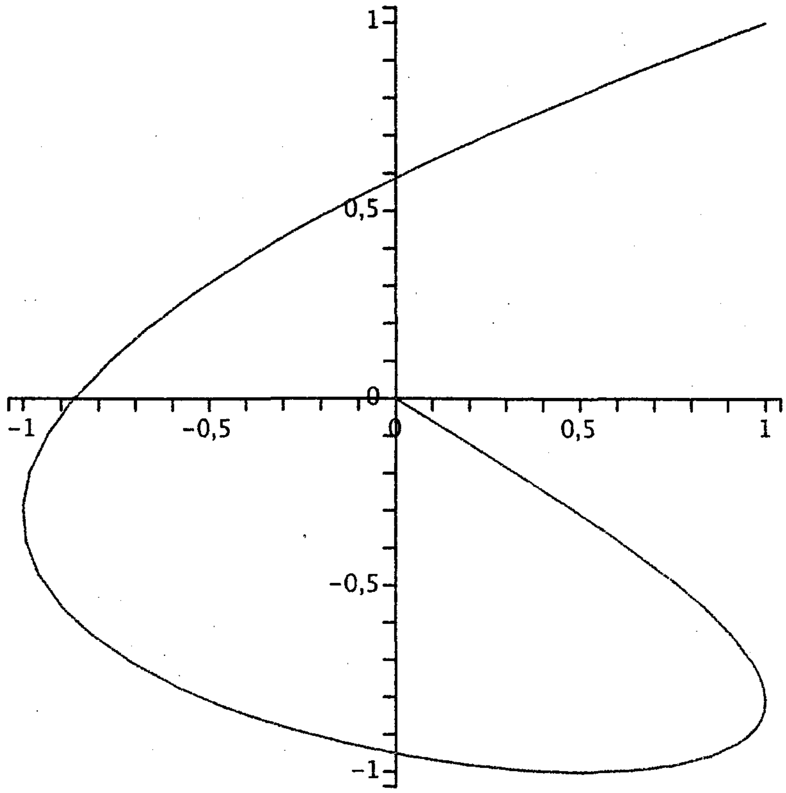
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & \cos(t) \\ y(t) & = & \cos(\frac{3t}{5}) \end{array} \right. \end{array}$$

1) Déterminer la plus petite période (strictement positive) commune aux fonctions

$$t \longmapsto \cos(t), \quad t \longmapsto \cos(\frac{3t}{5})$$

Donner un exemple d'intervalle I de la forme $[0, a]$ (où a est un réel strictement positif) sur lequel il suffit d'étudier les fonctions x et y pour obtenir toute la courbe.

2) Un logiciel donne la partie du tracé de Γ correspondant à $t \in [0, \frac{5\pi}{2}]$, la voici :



Indiquer en le justifiant le tracé de Γ pour tout $t \in I$.

3) Pour quelle valeur du paramètre $t \in I$ la courbe passe-t-elle par l'origine O ? Déterminer une équation de la tangente à Γ en O.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On dispose d'une urne contenant $n-1$ boules numérotées de 1 à $n-1$ et de n boites $B_1, B_2, \dots B_n$.

Pour tout i compris entre 1 et n, la boite B_i contient i jetons numérotées de 1 à i.

On tire une boule de l'urne, si la boule tirée porte le numéro i on tire un jeton de la boite B_i et un jeton de la boite B_{i+1} . On dit qu'il y a un succès si les deux jetons portent le même numéro.

1) Quelle est la probabilité p_2 de succès lorsque $n=2$?

2) Quelle est la probabilité p_n de succès pour $n \geq 2$?

3) a) Montrer que pour tout k entier naturel non nul, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$ et en déduire un équivalent au voisinage de l'infini de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

b) Donner un équivalent de p_n pour n au voisinage de l'infini.