Banque « Agro-véto »
C — 0520

Mathématiques

Durée : 3 heures

Rappel : **l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.**

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet est constitué de deux problèmes totalement indépendants et comporte 8 pages.

Premier problème : le processus de Moran

On étudie dans ce problème le processus de Moran*, qui modélise l'évolution de la fréquence d'un gène à deux allèles dans une population finie.*

Le problème est constitué de deux parties totalement indépendantes. Dans la première, on étudie le processus de Moran dans une population de 3 individus. Dans la seconde, on étudie la probabilité de disparition d'un gène dans le cas général.

Présentation du processus

On considère une population de taille constante, disons de N individus ($N \in \mathbb{N}^*$) portant un gène et on étudie l'évolution de ce gène possédant deux allèles, qu'on notera A et B. Le processus évolue comme suit :

- imaginons qu'à un instant $n \in \mathbb{N}$, la population contient i allèles A (avec $i \in \{0, 1, ..., N\}$) — et par conséquent $N - i$ allèles B.
- à l'instant $n + 1$, on pioche au hasard un individu dans la population, on note son allèle, puis on le remet dans la population. Ensuite on pioche un nouvel individu dans la population — éventuellement le même. Si les deux individus piochés ont le même allèle, rien ne change. Dans le cas contraire, on fait subir une mutation au dernier individu pioché de sorte que son allèle soit le même que celui du premier individu pioché.

  Cela s'apparente à deux tirages successifs avec remise.

Ainsi, plus un allèle est présent dans la population, plus il a de chance de se reproduire.

Ce procédé nous permet alors de construire une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est le nombre d'individus dans la population qui possède l'allèle A à l'étape n.

Partie A : Étude du cas particulier $N = 3$

Dans cette partie, on étudie le processus de Moran dans le cas : $N = 3$, *c'est-à-dire dans une population de trois individus. Dans un premier temps, on calcule un produit matriciel. Dans un deuxième temps, on calcule la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1. **Calculs préliminaires :** On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice M.

   (b) Montrer que $\frac{1}{3}$ et $\frac{7}{9}$ sont valeurs propres simples de M, tandis que 1 est valeur propre double.

   (c) La matrice M est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.

On pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et on admet que : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Calculer la matrice $D = P^{-1}MP$.

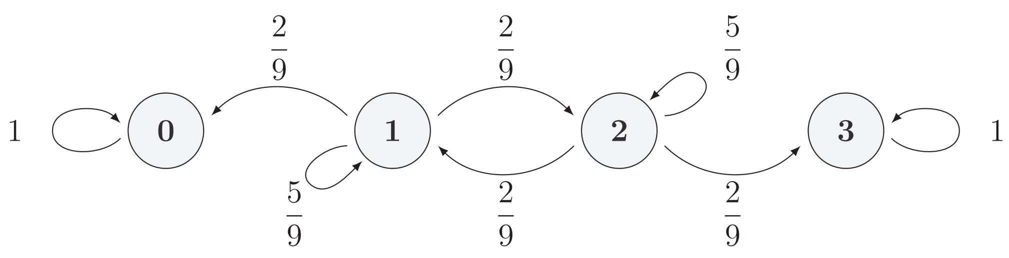
(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer le produit $PD^nP^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Retour au processus de Moran : On considère le processus de Moran avec : $N = 3$.

On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n désigne le nombre d'individus possédant l'allèle A à la n-ième étape du processus. **On suppose de plus** qu'à l'instant initial, il n'y a qu'un seul individu possédant l'allèle A, c'est-à-dire : $\mathbb{P}[X_0 = 1] = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Justifier que : $\mathbb{P}_{[X_n=0]}[X_{n+1} = 0] = 1$ et $\mathbb{P}_{[X_n=3]}[X_{n+1} = 3] = 1$.
   (b) Soit $i \in \{1, 2\}$. Justifier que :
      - $\mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1} = i] = \dfrac{i^2 + (3-i)^2}{9}$.
      - $\mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1} = i+1] = \mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1} = i-1] = \dfrac{i(3-i)}{9}$.
      - $\mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1} = j] = 0$ si $j \notin \{i-1, i, i+1\}$.

On a représenté ci-dessous le *graphe du processus*. Dans les ronds, on lit le nombre d'individus de la population qui ont l'allèle A. Les flèches donnent la probabilité de passer d'un état à un autre en une étape.



Par exemple :

— la probabilité de passer d'une population à 1 allèle A à une population à 2 allèles A en une seule étape vaut : $\dfrac{2}{9}$.

— la probabilité de passer d'une population à 2 allèles A à une population à 2 allèles A en une seule étape vaut : $\dfrac{5}{9}$.

Lorsqu'il n'y a pas de flèche, c'est que cette probabilité est nulle. Par exemple, on ne peut pas passer d'une population sans allèle A à une population qui en a un.

3. Déterminer la loi de X_1 et X_2.

4. Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la probabilité $\mathbb{P}[X_{n+1} = k]$ en fonction de $\mathbb{P}[X_n = 0]$, $\mathbb{P}[X_n = 1]$, $\mathbb{P}[X_n = 2]$ et $\mathbb{P}[X_n = 3]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] \\ \mathbb{P}[X_n = 1] \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \\ \mathbb{P}[X_n = 3] \end{pmatrix}$. Remarquons que : $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. En déduire que le vecteur U_n satisfait la relation de récurrence : $U_{n+1} = MU_n$, où la matrice M a été définie dans le calcul préliminaire.
6. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $U_n = M^n U_0$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = \frac{2}{3} - \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X_n = 1] = \frac{1}{2 \times 3^n} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{7}{9}\right)^n.$$

On admet pour la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}[X_n = 2] = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n - \frac{1}{2 \times 3^n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[X_n = 3] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n.$$

8. En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}[X_n = 0]$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}[X_n = 3]$.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}[X_n] = 1$.

Partie B : Probabilité de disparition d'un allèle dans le cas général

On revient au processus de Moran dans le cas où $N \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.
On admet que pour tous $i \in [\![1, N-1]\!]$ et $n \in \mathbb{N}$:

- $\mathbb{P}_{[X_n=0]}[X_{n+1} = 0] = 1$ et $\mathbb{P}_{[X_n=N]}[X_{n+1} = N] = 1$.
- $\mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1} = i] = \dfrac{i^2 + (N-i)^2}{N^2}$.
- $\mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1} = i+1] = \mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1} = i-1] = \dfrac{i(N-i)}{N^2}$.
- $\mathbb{P}_{[X_n=i]}[X_{n+1} = j] = 0$ si $j \notin \{i-1, i, i+1\}$.

Pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$, on note :

— p_i la probabilité que, sachant qu'il y avait initialement i allèles A, l'allèle B disparaisse.

— q_i la probabilité que, sachant qu'il y avait initialement i allèles A, l'allèle A disparaisse.

10. Préciser les valeurs de p_0, p_N, q_0 et q_N.
11. On admet que pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$:

$$p_i = \frac{i(N-i)}{N^2} p_{i-1} + \frac{i^2 + (N-i)^2}{N^2} p_i + \frac{i(N-i)}{N^2} p_{i+1}.$$

   (a) En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$: $p_{i+1} - p_i = p_i - p_{i-1}$.

   (b) En sommant les égalités précédentes, montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, N-1\}$:

$$p_{k+1} = p_k + p_1.$$

   (c) Exprimer finalement p_k en fonction de p_1, pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$ puis en déduire que : $p_k = \dfrac{k}{N}$.

12. (a) Justifier que pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$: $q_i = p_{N-i}$.

   (b) Calculer $p_i + q_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$.

   (c) Qu'en concluez-vous ?

Second problème : le refroidissement d'une tasse de thé

Ce problème est constitué de deux parties, très largement indépendantes entre elles. Dans la première partie, on étudie le refroidissement d'une tasse de thé. Dans la seconde, on étudie la convergence d'une suite.

Partie A : Le refroidissement d'une tasse de thé

On désire refroidir une tasse de thé : mieux vaut-il mettre l'eau froide au début, et attendre que le thé refroidisse, ou plutôt attendre que le thé refroidisse, puis mettre de l'eau froide juste avant de boire le thé ?

Afin de répondre à cette question, on a réalisé deux expériences en laboratoire. Dans la première, on donne l'évolution de la température de l'eau au cours du temps. Dans la seconde, on répond effectivement à la question posée.

Première expérience : refroidissement d'une tasse d'eau chaude

Première expérience : On chauffe de l'eau, puis on en verse dans une tasse, qu'on laisse refroidir à l'air libre sur une table. On mesure alors l'évolution de la température de l'eau au cours du temps.

La loi de refroidissement de Newton (1642-1727) stipule que « *le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre le corps et le milieu environnant* ». En supposant la température du laboratoire constante au cours du temps, égale à 20 degrés Celsius, il existe donc un nombre réel r strictement positif, dépendant uniquement de la nature du liquide (ici de l'eau), pour lequel :

$$\forall t \geq 0, \quad T'(t) = -r\big(T(t) - 20\big) \qquad (\mathcal{E})$$

où $T(t)$ désigne la température (exprimée en degrés Celsius) de l'eau à l'instant t (exprimé en minutes). On notera T_{init} la température de l'eau au début de l'expérience supposée supérieure à 50°C.

1. (a) Montrer que l'unique solution de l'équation $(\mathcal{E})$ est la fonction :
$$t \mapsto 20 + (T_{init} - 20)\mathrm{e}^{-rt}.$$
   (b) Déterminer, en fonction des paramètres T_{init} et r, le temps qu'il faut attendre pour que la température de l'eau soit de 50 degrés Celsius.

2. **Détermination des paramètres :** Afin de déterminer les paramètres T_{init} et r, on a réalisé l'expérience en laboratoire. Cinq minutes après avoir versé l'eau dans la tasse, on met une sonde dans l'eau et on relève la température : toutes les minutes pendant 5 minutes, puis toutes les cinq minutes pendant 50 minutes suivantes (l'expérience dure au total 60 minutes). Sur **l'annexe A, page 8 après la fin du sujet**, on a affiché :
   — le nuage de point associé à cette mesure sur la figure 1,
   — le graphe d'équation : $y = \ln\big(T(t) - 20\big)$ sur la figure 2.

   On s'intéressera UNIQUEMENT à la figure 2.
   (a) Justifier le fait que l'on trouve une droite.
   (b) Déterminer graphiquement une valeur approchée au dixième du paramètre r. *Justifier la réponse.*
   (c) Sachant qu'à l'introduction de la sonde (à la cinquième minute de l'expérience), la température de l'eau était de 56,4 °C, déterminer la valeur de T_{init}.

Deuxième expérience : refroidissement d'une tasse par mélange

On réalise à présent une nouvelle expérience en supposant toujours la température du laboratoire à 20 °C.

Deuxième expérience : On chauffe de l'eau, puis on verse 20 centilitres de cette eau chaude dans chacune des deux tasses. On y verse ensuite 5 centilitres d'eau à la température de 5°C (tout droit sortie du réfrigérateur) dans chacune des deux tasses de la façon suivante :

Tasse A : Dans la première tasse, on verse immédiatement les 5 centilitres d'eau, puis on attend 5 minutes que la tasse refroidisse.

Tasse B : Dans la seconde tasse, on attend 5 minutes que la tasse refroidisse, puis on verse les 5 centilitres d'eau.

Rappel : On admet que lorsqu'on mélange un volume d'eau V_1 à température T_1 avec un volume d'eau V_2 à température T_2, on obtient un volume d'eau $V_1 + V_2$ dont la température est égale à : $T_{\text{mélange}} = \dfrac{T_1V_1 + T_2V_2}{V_1 + V_2}$.

3. L'une des deux tasses est-elle plus froide que l'autre au bout des 5 minutes ? Justifier le résultat par un calcul en supposant que la température de l'eau chaude au moment où on la verse dans les tasses est de 100°C et que $r = 0{,}1$.

Partie B : Calcul approché de T(5)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $T_0 = 100$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$T_{k+1} = T_k - \frac{1}{2N}(T_k - 20).$$

Le but de cette partie est de montrer que T_N tend vers $T(5)$ lorsque N tend vers $+\infty$, où $T(5)$ est défini à la question 1a en prenant : $T_{init} = 100$ et $r = 0{,}1$.

4. (a) Résoudre l'équation : $\left(1 - \dfrac{1}{2N}\right)x + \dfrac{10}{N} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $S_k = T_k - 20$. Montrer que la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, dont on précisera la raison.

   (c) En déduire une expression de S_N, puis montrer que : $T_N = 20 + 80\left(1 - \dfrac{1}{2N}\right)^N$.

5. **Convergence de $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$:**

   (a) Montrer que pour tout $x > -1$:

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x. \qquad (1)$$

   (b) Montrer que : $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

   (c) En déduire que : $\left(1 - \dfrac{1}{2N}\right)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-0{,}5}$, puis que : $T_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} T(5)$.

6. **Vitesse de convergence :** Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

(a) Justifier que : $\dfrac{1}{1-2N} \leq \ln\left(1 - \dfrac{1}{2N}\right) \leq -\dfrac{1}{2N}$, puis que :

$$\mathrm{e}^{\frac{N}{1-2N}} \leq \left(1 - \frac{1}{2N}\right)^N \leq \mathrm{e}^{-0,5}.$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$. *On pourra utiliser l'inégalité* (1).

(c) Déterminer deux réels a et b, ne dépendant pas de N, pour lesquels :

$$\frac{N}{1-2N} = a + \frac{b}{1-2N}.$$

(d) En déduire finalement que : $0 \leq \mathrm{e}^{-0,5} - \left(1 - \dfrac{1}{2N}\right)^N \leq \mathrm{e}^{-0,5} \times \dfrac{0,5}{2N-1}$.

— Annexe de la partie A —

Partie A : Première expérience

On chauffe de l'eau, puis on en verse dans une tasse, qu'on laisse refroidir à l'air libre sur une table. Cinq minutes après avoir versé l'eau, on prend la température :

- toutes les minutes entre la cinquième et dixième minute.
- toutes les 5 minutes pendant les cinquante minutes suivantes.

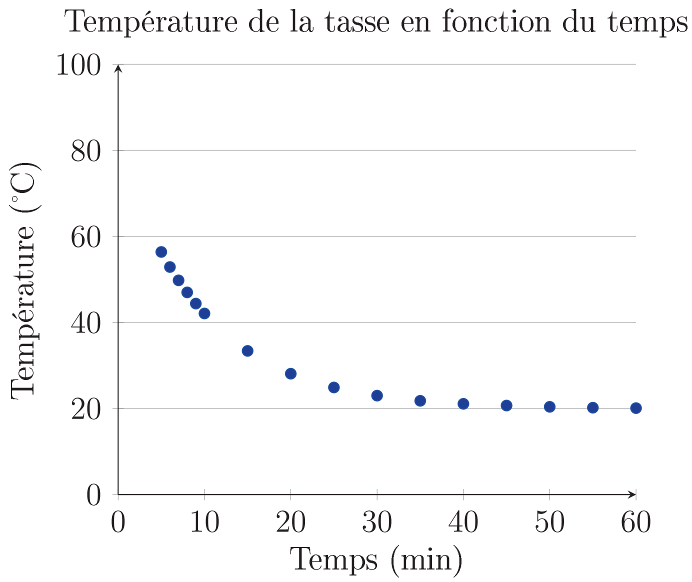


FIGURE 1 – Évolution de la température de l'eau au cours du temps

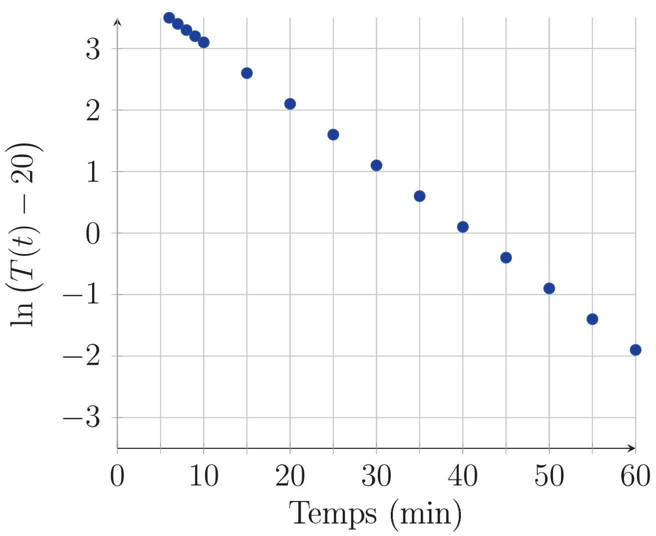


FIGURE 2 – Courbe : $y = \ln\left(T(t) - 20\right)$

— FIN DU SUJET —