Banque « Agro-véto »
C — 0519

Mathématiques

Durée : 3 heures

Rappel : l'usage de la calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Le sujet est constitué de deux problèmes totalement indépendants et comporte 6 pages.

Premier problème : trois modèles d'évolution de population de lapins

Partie A : Un modèle d'ordre 1

Dans un endroit clos, on introduit le 1^er^ janvier 100 lapins, tous des mâles, de sorte qu'aucun nouveau lapin ne puisse naître. Ces lapins disposent de toute la nourriture nécessaire pour vivre. On estime que tous les 1^er^ de chaque mois suivant, 5% de la population meurt, mais pour compenser cette perte, on y introduit au même moment 10 nouveaux lapins, des mâles eux aussi.

On note a_n le nombre de lapins au 1^er^ jour du n-ième mois qui suit la première introduction de lapins dans l'enclos.

Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. (a) Justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait l'équation :
$$a_{n+1} = 0{,}95 \times a_n + 10 \tag{1}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec : $a_0 = 100$.
   (b) Résoudre l'équation : $0{,}95x + 10 = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On note ℓ l'unique solution de cette équation.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $b_n = a_n - \ell$. Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $0,95$.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de b_n, puis de a_n, en fonction de n.
3. Combien pourra-t-il y avoir de lapins au maximum dans l'enclos ?

Partie B : Un modèle d'ordre 2 — la suite de Fibonacci

Ce modèle a été introduit par Leonardo Fibonacci ($\approx 1175, \approx 1250$) et décrit la croissance d'une population de lapins.

Un couple de lapins est placé dans un enclos, isolé de l'extérieur. On estime que, après deux mois de vie, un couple de lapins donne naissance chaque mois à un nouveau couple de lapins.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le nombre de couples de lapins au premier jour du n-ième mois qui suit le début de l'observation.

Dans ce modèle, on suppose que :

- au début, l'enclos est vide : $F_0 = 0$.
- au premier mois, on introduit une paire de lapereaux : $F_1 = 1$.
- lors du deuxième mois de vie, les lapereaux ne se reproduisent pas. Ils grandissent simplement et deviennent lapins : $F_2 = 1$.
- chaque mois suivant, toute paire susceptible de procréer engendre effectivement une nouvelle paire de lapereaux. Les nouveaux nés devront attendre deux mois avant de pouvoir procréer.
- les lapins vivent indéfiniment.

La population à l'instant $n+2$ est constituée des lapins présents à l'instant $n+1$, augmentée des nouveaux-nés. Ces derniers sont issus des couples âgés d'au moins 2 mois, c'est-à-dire qui étaient présents à l'instant n.

La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait donc la relation :
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{2}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec : $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

4. **Questions préliminaires :** On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Justifier que : $\chi_A(X) = X^2 - X - 1$.

   (b) Calculer les valeurs propres μ_1 et μ_2 de A. On les ordonne de sorte que : $\mu_1 < \mu_2$.

   (c) Déterminer une matrice P pour laquelle : $A = P \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} P^{-1}$.

5. **Retour à la suite de Fibonacci :**

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = AU_n$.

   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de U_n en fonction de A^n et U_0.

   (c) Justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n est de la forme $a\mu_1^n + b\mu_2^n$.
   On ne demande pas de calculer les valeurs de a et b dans cette question.

   (d) Déterminer une expression explicite de F_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En utilisant F_0 et F_1, on pourra montrer que (a, b) est solution d'un système linéaire.

6. Au bout de combien de mois aura-t-on plus de 4000 couples de lapins dans l'enclos ?

Partie C : Un modèle d'ordre 3 — la suite de Padovan

On suppose à présent que, au lieu de vivre indéfiniment, les lapins meurent au bout de 4 mois : ils ne mettent bas que deux fois seulement. On admet que, si on note Q_n le nombre de couples de lapins au n-ième mois, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_{n+3} = Q_{n+1} + Q_n \tag{3}$$

avec : $Q_0 = 0$ et $Q_1 = Q_2 = 1$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors : $V_{n+1} = BV_n$, en posant :

$$V_n = \begin{pmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \\ Q_{n+2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. (a) On note χ_B le polynôme caractéristique de B. Justifier que χ_B possède une unique racine réelle, qu'on note α. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

   (b) La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

   (c) Montrer que : $\chi_B(X) = -(X - \alpha)\left(X^2 + \alpha X + \dfrac{1}{\alpha}\right)$.

   (d) En déduire que χ_B possède deux racines complexes conjuguées, qu'on note β et $\bar{\beta}$, puis que : $|\beta| < 1$.

On admet qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_n = c\alpha^n + d\beta^n + \bar{d}\bar{\beta}^n.$$

8. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left| \dfrac{Q_n}{\alpha^n} - c \right| \leq \dfrac{2|d|}{\alpha^n}$.

   (b) En déduire que la suite $\left(\dfrac{Q_n}{\alpha^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Deuxième problème : Le collectionneur de coupon

À la dernière coupe du monde de football, une célèbre marque de chocolat avait glissé dans chaque tablette l'écusson d'une nation.

Lorsqu'on achète une tablette, on ne sait pas à l'avance quel écusson y sera. Il arrive donc que l'on obtienne plusieurs fois les mêmes écussons. On risque même de ne jamais compléter la collection !

Le problème a pour but :

- D'estimer le temps nécessaire pour avoir un écusson en double.
- De déterminer, en moyenne, le nombre de tablettes de chocolat à acheter pour compléter la collection.

Dans la partie A, on étudie une situation de pile ou face.

Dans la partie B, on étudie le problème du collectionneur de coupon. Cette partie utilise les résultats de la partie A.

Dans la partie C, on étudie la convergence d'une suite : elle est, à l'exception de la dernière question, indépendante des deux premières.

Partie A : Un jeu de pile ou face — la loi géométrique

Soit $p \in]0;1[$. On lance une pièce non équilibrée et telle que la probabilité d'obtenir pile est égale à p. On cherche à déterminer la probabilité de voir apparaître un pile pour la première fois.

On note G la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du premier pile.

1. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre G.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que signifie l'évènement $\{G = n\}$?

   (b) Justifier que : $\mathbb{P}[G = 1] = p$ et $\mathbb{P}[G = 2] = p(1-p)$.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}[G = n] = (1-p)^{n-1}p$.

   Dans ce cas, on dit que G suit une loi *géométrique de paramètre* p et on note : $G \sim \mathcal{G}(p)$.
3. Soit $G \sim \mathcal{G}(p)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}[G \leq n] = 1 - (1-p)^n$.

Partie B : Le collectionneur de coupons

Modélisation : Soit $r \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'écussons différents à collectionner. On suppose que :

- il y a un très grand nombre de tablettes, donc d'écussons (à raison d'un écusson par tablette), ce qui permet d'assimiler chaque choix d'une tablette à un tirage avec remise.
- les écussons sont répartis uniformément, c'est-à-dire qu'il y en a autant de chaque : si on ouvrait toutes les tablettes, on aurait la même proportion de chaque sorte.
- il y a indépendance entre les achats : si on trouve un écusson dans une tablette, cela ne présage en rien de l'écusson qui se trouvera dans la prochaine tablette.

On attribue à chaque écusson un numéro entre 1 et r.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $X_k \in \{1, \ldots, r\}$ le numéro de l'écusson contenu dans la k-ème tablette. On suppose que les X_k sont indépendantes et identiquement distribuées.

4. Justifier que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{1, \ldots, r\}$: $\mathbb{P}[X_k = j] = \dfrac{1}{r}$.

On note S_r le rang d'apparition du premier double.

5. (a) Justifier que : $\mathbb{P}[S_r > 1] = 1$ et $\mathbb{P}[S_r > r+1] = 0$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \{2, \dots, r\}$:
$$\mathbb{P}_{[S_r > k-1]}[X_k \notin \{X_1, X_2, ..., X_{k-1}\}] = 1 - \frac{k-1}{r}$$

   (c) En déduire que pour tout $k \in \{2, \dots, r\}$: $\mathbb{P}[S_r > k] = \mathbb{P}[S_r > k-1] \times \left(1 - \frac{k-1}{r}\right)$.

   (d) En déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$: $\mathbb{P}[S_r > k] = \frac{r!}{(r-k)!r^k}$.

6. Sachant qu'il y a avait 32 écussons à collectionner, quelle est la probabilité de ne pas avoir de double après 10 achats ?

On note N_k le nombre de tablettes achetées pour obtenir k images différentes avec la convention : $N_0 = 0$. Enfin, on pose : $T_k = N_k - N_{k-1}$, le nombre de tablettes achetées pour obtenir une nouvelle image, alors que l'on en possède déjà $k-1$, de sorte que, pour tout $k \in \{1, ..., r\}$:
$$N_k = \sum_{j=1}^{k} T_j.$$

7. Calcul des lois des temps d'attente.

   (a) Justifier que : $\mathbb{P}[T_1 = 1] = 1$.

   (b) Montrer que : $T_2 \sim \mathcal{G}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$ où $\mathcal{G}$ est la loi géométrique définie en **partie A**.
   On pourra calculer $\mathbb{P}[T_2 = l]$, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Soit $k \in \{1, ..., r\}$. Décrire T_k comme un premier instant de succès et en déduire que : $T_k \sim \mathcal{G}\left(\frac{r-k+1}{r}\right)$.

   On admet que pour tout $p \in]0;1[$, si $G \sim \mathcal{G}(p)$, alors : $\mathbb{E}[G] = \frac{1}{p}$.

   (d) En déduire que : $\mathbb{E}[N_r] = r\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{r}\right)$.

Partie C : Estimation de $\mathbb{E}[N_r]$

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}, \qquad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $S_n = H_n - \ln(n+1)$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout entier m avec : $m \geq n$, on a :
$$\sum_{k=n}^{m} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m+1}.$$

   (c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En encadrant l'intégrale $\int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$, montrer que : $0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

(d) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis qu'elle converge.
On note γ sa limite.

(e) Montrer que : $\gamma \in [0;1]$.

9. (a) Parmi les les changements de variables : $t = u+p$, $t = pu$, $t = p-u$, indiquer celui qui permet de montrer que :

$$a_p = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{du}{u+p}.$$

(b) En remarquant que : $\frac{1}{p} = \int_0^1 \frac{du}{p}$, montrer que : $a_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{u}{u+p}du.$

(c) Montrer que pour tout $p \geq 2$:

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \tag{4}$$

$$\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \tag{5}$$

(d) En encadrant l'intégrale trouvée dans la question 9b et en utilisant les identités (4) et (5), déduire finalement que pour tout entier $p \geq 2$:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) \leq a_p \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

10. (a) En déduire que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec : $m > n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) \leq S_m - S_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

(b) Montrer finalement que pour tout entier $n \geq 1$: $\frac{1}{2(n+1)} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}$.

11. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+1) + \gamma - \frac{1}{2n} \leq H_n \leq \ln(n+1) + \gamma - \frac{1}{2(n+1)}.$$

12. Combien de tablettes faut-il acheter en moyenne pour compléter la collection de 32 écussons ?

On donne : $\gamma \approx 0{,}577$.

– FIN DU SUJET –