

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

L'épreuve de Calcul et Raisonnement de la session 2019 est composée de trois exercices : Analyse, Probabilités puis Algèbre. Ce découpage correspond à celui du programme, bien que cette partition ne soit pas totalement stricte. En effet l'exercice de probabilités fait appel à des techniques de calcul intégral qui sont du domaine de l'analyse. Par ailleurs à la fin de l'exercice d'algèbre, se trouvent plusieurs questions de probabilités.

Strictement indépendants les uns des autres, les trois exercices se veulent de difficulté progressive. Le premier d'entre eux étudie une suite récurrente au moyen d'une autre suite, arithmético-géométrique, que les candidats ont déjà rencontrée. Ses premières questions sont délibérément élémentaires et se veulent rassurantes. Suit l'exercice de probabilité, moins guidé (et moins réussi). Il s'avère aussi plus technique car il évalue les compétences de calcul intégral dans le cadre de fonctions trigonométriques.

L'exercice d'algèbre, plus long, gravite autour de questions de diagonalisation et de calcul de puissances de matrices. Les six premières questions sont classiques et attendues. La fin de l'exercice d'algèbre porte sur les probabilités (on applique certains des résultats trouvés pour étudier une chaîne de Markov particulière à trois états, présentée dans un cadre concret). Même si un candidat n'avait pas réussi les questions précédentes en algèbre, il pouvait traiter trois des quatre questions de probabilités de la fin de cet exercice.

Rappelons à ce propos qu'il n'est pas nécessaire de finir le sujet pour obtenir une note correcte, particulièrement dans ce sujet assez long. Au contraire, en terme de stratégie, nous encourageons les candidats à prendre le temps de lire l'énoncé, et à repérer les questions qu'ils savent traiter.

En identifiant ces questions "classiques", un candidat raisonnable qui s'était préparé méthodiquement, pouvait obtenir une bonne note même sans posséder de virtuosité particulière en mathématiques. A l'inverse certains candidats (parfois dans les mieux classés) omettent de traiter les questions les plus simples, sans doute faute de temps ou de lecture préalable du sujet. C'est dommage pour eux !

En conclusion, le sujet a permis de départager les candidats en proposant une variété de questions couvrant tout le programme, dont de nombreuses questions "déjà vues dans l'année" qu'il fallait (re)connaître puis résoudre. Les remarques des rapports précédents s'appliquent encore, et les candidats sont donc invités à les consulter.

Remarques transversales

Rédaction: des améliorations par rapport à la session précédente

Au sujet du raisonnement par récurrence, les candidats sont maintenant nombreux à mettre en valeur les termes *initialisation* et *hérédité*, qui sont ceux attendus. Dans leur grande majorité, ils précisent souvent quelle proposition ils démontrent.

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Quelques rares copies confondent encore l'hérédité avec la proposition "Si pour tout entier n $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie".

Type/unité des objets mathématiques

Comme chaque année, nous rappelons aux candidats qu'ils doivent attacher de l'importance au type de l'objet manipulé: fonctions, matrices, scalaires, événements, nombres sont à différencier. Une erreur fréquente cette année: il n'est pas licite de parler de la probabilité d'un nombre réel.

Conclusion des questions

Les candidats ont plutôt tendance à bien démarrer la plupart des raisonnements et calculs, montrant ainsi qu'ils connaissent les méthodes classiques. Ils oublient cependant assez fréquemment d'écrire la conclusion précise demandée par l'énoncé. "Le réel 0 est donc valeur propre de la matrice A", "La suite est géométrique de raison q ", "Ainsi on a $I=4$ " constituent des conclusions structurantes d'une copie. Les copies dans lesquelles les résultats et conclusions sont mis en évidence (et encadrés d'une autre couleur, idéalement) sont tout à fait appréciées.

Niveau des candidats

Dans les copies les plus faibles, se mettent à jour des difficultés qui proviennent de la scolarité antérieure. Parfois même certains principes fondamentaux enseignés au collège ne semblent pas intégrés (cf commentaire sur Analyse, Q2).

A l'inverse, les 20 premiers classés sur cette épreuve nous ont paru ressortir du lot car ils possèdent de solides connaissances. Commentaire plus anecdotique : nous n'avons, cette année, rencontré aucune copie "exceptionnelle" démontrant un talent mathématique particulièrement remarquable (cela était arrivé lors de certaines sessions antérieures). En particulier, aucun candidat n'a résolu les trois questions les plus difficiles.

Commentaires sur certaines questions du sujet

Analyse

Première partie

Q1 100% de bonnes réponses à cette question, ce qui était l'objectif visé.

Q2 Question très simple consistant à résoudre $(L=\frac{1}{2}L + 1)$. Les candidats ont appris à résoudre cette équation au collège. Pourtant cette question les départage déjà. *Une quinzaine de candidats se trompent dans la résolution de cette équation, soit 10% d'entre eux.* Une quarantaine d'autres manquent de rigueur : en effet en mathématiques la résolution de cette équation devrait donner lieu à une équivalence. Plus précisément ces candidats démontrent que la condition $(L=2)$ est seulement nécessaire, ou

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

seulement suffisante, en oubliant la réciproque. Pour ceux-là, les notions d'implication directe, de réciproque et d'équivalence, sont donc mal assimilées même sur cet exemple élémentaire.

A contrario, $\frac{2}{3}$ des copies résolvent cette équation parfaitement.

Q5 Tous les arguments ont leur importance: la raison de la suite est *strictement* comprise entre -1 et 1, on conclut par opérations sur les limites.

Deuxième partie

Q1 Récurrence souvent assez bien menée, on attend la démonstration de la propriété $P(n)$: *« $v(n)$ est bien défini et est strictement positif* ».

Q2 Des points supplémentaires étaient attribués, lorsque le candidat précisait que le réel $v(n)$ était non nul lors du passage à l'inverse.

Q3 Question plus difficile. Même lorsque l'argumentation était maladroite, la simple reconnaissance de la suite $u(n)$ était récompensée par le maximum de points.

Certaines copies consacrent deux pages à l'étude de la suite $v(n)$ et de sa convergence. Ils l'écrivent sous la forme $v(n+1)=f(v(n))$, avec au menu les variations de f , ses points fixes, etc. Cela n'aboutit pas et leur fait perdre du temps.

Q4 Question sur les équivalents, difficile et initialement destinée à départager les meilleurs des candidats. Aucune bonne réponse.

Probabilités

Cet exercice est le moins bien réussi, car les candidats ont souvent des difficultés en trigonométrie élémentaire et/ou en intégration.

Première partie

Q1 Il fallait former l'intention de faire apparaître dans l'intégrale la formule $\sin^2+\cos^2=1$. En construisant ce sujet nous imaginions que cette formule classique de trigonométrie, vue en seconde, s'imposerait spontanément à l'esprit des candidats; mais ce n'est pas toujours le cas.

Sont souvent proposées des primitives (fausses) pour la fonction \cos^2 , comme par exemple l'expression $\sin^3/3$. Seules 87/150 copies donnent la bonne réponse

Q2 L'essentiel de l'argument réside dans le calcul de la dérivée, qui pose parfois problème. Par ailleurs, les valeurs des fonctions trigonométriques en 0, et a fortiori en 2π , ne sont pas toujours connues.

Q3 Il s'agit de démontrer l'égalité $J-I=0$, résultat *qui était donné dans l'énoncé*. L'argument essentiel pour montrer cette égalité est de retrouver la formule $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\cos(2x)$. Celle-ci n'est pas toujours connue des candidats.

Mais il y a un autre problème : certains de ceux des candidats qui ignorent cette formule, plutôt que de passer à une autre question qu'ils savent résoudre, utilisent quelque moyen illicite pour parvenir au résultat $J-I=0$.

Ce genre de stratégie ne fait pas illusion, et cette manière de forcer la question tend à indisposer le correcteur qui pourra ne pas être indulgent, "en cas de doute", dans les questions qui suivent.

Q4 Système souvent bien résolu.

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Q5 L'emploi de la méthode (même sans la valeur correcte) était récompensé.

Deuxième partie

Q1 Le mélange intégration / trigonométrie est l'occasion de nombreuses erreurs.

Q2 Des points sont accordés sur la formule exacte de l'intégration par parties, et sur le caractère C1 des fonctions.

Q3 La linéarisation de cette expression trigonométrique pose souvent problème.

Q4 Question rarement réussie, car elle nécessite d'avoir assez bien réussi les précédentes.

Troisième partie

Q1 Un nombre raisonnable de candidats parviennent à exploiter les questions précédentes. En particulier beaucoup se rendent compte que l'on dispose déjà d'une primitive de la fonction $x \rightarrow \cos(2x)$.

Q2 Réponse souvent incomplète. La valeur de $P(X \leq x)$ pour x supérieur à π , est souvent donnée égale à 0 (alors qu'elle vaut 1).

Q3 La définition d'une fonction de répartition n'est pas connue de la majorité des candidats. Des points sont accordés pour chaque morceau juste de la fonction, et en moyenne $\frac{1}{3}$ des points sont obtenus. Q4 Rarement traitée.

Quatrième partie

Q1 La forme u^2 est rarement reconnue (4 copies sur 150).

Q2 Moins de 10 copies envisagent le théorème de transfert, sa seule mention suffisait à obtenir des points.

Algèbre

Première partie

Q2 une grande liberté de méthode était volontairement laissée aux candidats. Par exemple, certains se contentent de trouver un vecteur propre, d'autres cherchent à calculer toutes les valeurs propres de la matrice. Malheureusement, le calcul du rang de la matrice $J-xI$ en fonction du paramètre x , s'accompagne très souvent d'erreurs de calcul.

Par ailleurs nous remarquons qu'un certain nombre de candidats opèrent maladroitement dans cette question. Voici par exemple une situation rencontrée dans un certain nombre de copies. Pour prouver que 0 est valeur propre de J , le candidat annonce son intention de calculer le rang de J (c'est une méthode possible). A cette fin, il considère le système homogène associé. En cours d'échelonnement, il semble oublier pourquoi il étudie ce système: il termine alors en donnant une famille génératrice de E_0 (c'est en fait l'objet de la question suivante). Il semble oublier la question initiale, omet de conclure que 0 est valeur propre, et ne peut malheureusement se voir accorder la totalité des points.

Q3 Point positif : les candidats pensent souvent à bien montrer que l'on dispose d'une base de E_0 , et pas seulement d'une famille génératrice.

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

Q4 Un vecteur propre doit être non nul, propriété presque toujours oubliée des candidats. Le reste est compris.

Q5 On demandait, à partir du rang de $J-3I$, de calculer la dimension de son noyau. Le théorème du rang était attendu.

Q7 Pour démontrer que $D^n = P^{-1}J^n P$, la locution “par récurrence immédiate” était ici acceptée.

Deuxième partie

Q1 et Q3a Questions très largement réussies.

Q2 et Q3b sont les deux questions les plus difficiles du sujet. Elles portent sur des démonstrations générales plus abstraites, et demandent une appropriation plus profonde des concepts de l'algèbre linéaire. Beaucoup de candidats abordent ces questions, mais aucun de les résout correctement.

Troisième partie

Certains candidats proposent une expression exacte de A^n : des points sont donnés même s'ils ne parviennent pas à démontrer leur conjecture.

Quatrième partie

La fin du sujet contenait des questions d'un genre classique et certainement déjà envisagé en cours. Si le candidat lisait tout le sujet et s'en rendait compte, il disposait alors d'un moyen supplémentaire de gagner des points.

Q1 Le résultat est souvent trouvé. Sa justification, elle, laisse à désirer. Il fallait que le candidat introduise de lui-même les événements auxquels il comptait appliquer la formule des probabilités totales. Ce geste autonome un peu complexe est rarement bien mené.

Q2 Résultat souvent juste, lorsque la question est traitée.

Q3 L'utilisation de la matrice est bien comprise par les candidats.

Q4 Rarement abordée faute de temps.