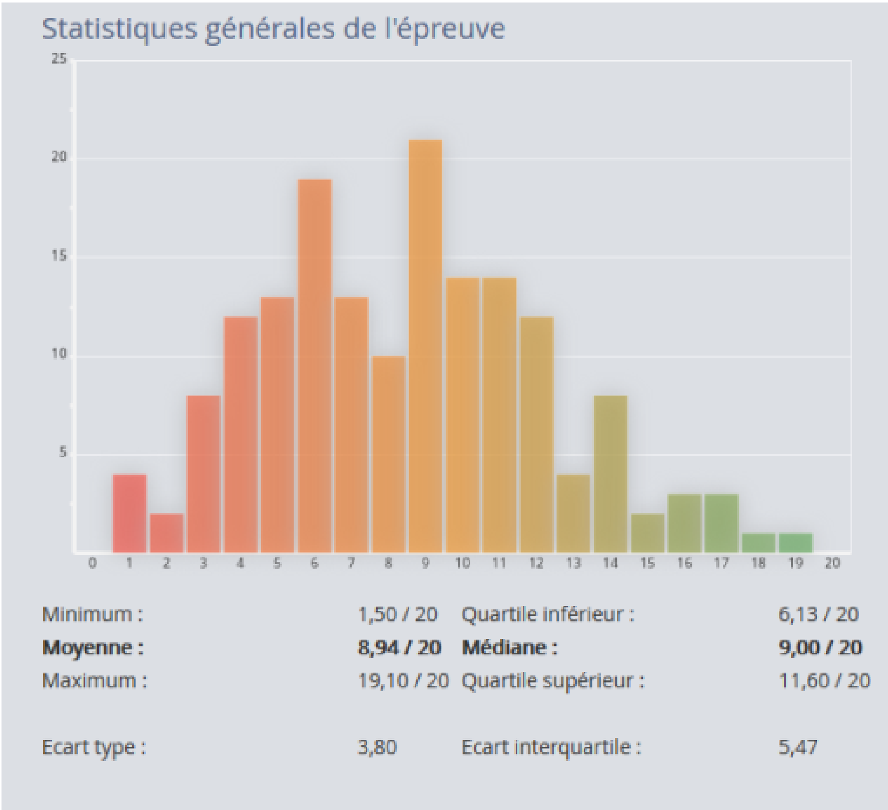
CONCOURS A TB - 2020

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT



L'épreuve de Calcul et Raisonnement de la session 2020 est composée de trois exercices indépendants les uns des autres, et se voulant chacun de difficulté progressive : Algèbre, Analyse, puis Probabilités. Ce découpage correspond à celui du programme, avec un cloisement net des thèmes pour cette session.

Le premier exercice étudie les matrices de rotations en dimension 2, de la forme

$$M_a = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

Les premières questions sont élémentaires et demandent au candidat une connaissance minimale des formules associées au cercle trigonométrique. Sont ensuite étudiés les éléments propres de M_a et sa propriété de conservation de la norme euclidienne. La formule $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ n'étant pas rappelée, quelques candidats ont pu être gênés à ce moment. Ignorer cette formule n'empêchait pas de progresser dans la suite de l'exercice : des difficultés techniques plus gênantes pour les candidats résidaient dans la manipulation de nombres complexes pour factoriser ou développer un polynôme du second degré, puis pour en déterminer les racines.

Globalement cet exercice a été moyennement bien réussi comparativement aux autres années. Outre les raisons techniques citées plus haut (nombres complexes, trigonométrie), une explication possible pourrait être que certains candidats connaissent leur exercice de réduction–type quasiment par coeur, mais ont peut-être parfois trop essayé de le calquer tel quel. Cette approche ne fonctionnait pas très bien avec l'énoncé d'algèbre de cette session : la démarche était un peu différente, et en particulier l'enchaînement des questions.

Dans l'exercice d'analyse, on établit le résultat suivant :

$$\forall x > 0 \ \arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$$

Ce résultat permet alors :

— d'une part de préciser l'énoncé classique : *si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une fonction définie et dérivable sur I, telle que $u'(x) = 0$ pour tout réel x de I, alors u est constante sur I.* On manipule cet énoncé, puis on construit un contre–exemple dans le cas où I n'est plus un intervalle.

— d'autre part de donner un équivalent de la suite de terme général $\frac{\pi}{2} - \arctan(n)$.

Les premières questions, de cours, constituent une première évaluation de la connaissance de la fonction arctangente. Elles ne sont pas incontournables pour la suite, et un candidat pouvait donc obtenir une bonne note à cet exercice, même s'il avait oublié quelques valeurs remarquables de la fonction $\arctan$ – et qu'il ne parvenait pas à les retrouver. Ensuite viennent des calculs classiques de dérivées : à nouveau une série de questions classiques et très discriminantes. On distingue ainsi très facilement les candidats de niveau acceptable (sachant dériver une fonction) de ceux dont le niveau est beaucoup plus faible. Les questions suivantes sont plus difficiles, et permettent de distinguer les meilleurs candidats. Ce deuxième exercice a été, sans surprise, le plus sélectif des trois.

Le dernier exercice (probabilités) est aussi le plus long. Il étudie quelques cas particuliers simples d'un problème classique : *Etant donné k objets disposés aléatoirement dans n boites, quelle est la loi du nombre de boites restées vides ?*

Cet exercice est beaucoup plus guidé, et même les questions difficiles sont rédigées de façon à ce que chacun puisse les traiter au moins partiellement. On y rencontre de nombreuses notions de probabilités discrètes dans un cadre fini : probabilités d'événements, indépendance, incompatibilité deux à deux, reconnaissance de lois classiques, espérance... Cela permet à des candidats de niveaux très divers de montrer leurs capacités en probabilités. Les notes y sont meilleures, mais avec de grands écarts entre candidats.

Le sujet a donc permis de départager les candidats en proposant une variété de questions couvrant tout le programme, dont de nombreuses questions "déjà vues avec le professeur" qu'il fallait (re)connaître puis résoudre.

Félicitons enfin **tous** les candidats pour avoir réussi à se préparer à l'épreuve en cette année très particulière marquée sous le signe de l'urgence sanitaire. Distanciation sociale, confinement et décalage des épreuves de concours ne les ont apparemment pas découragés de réviser avec énergie et détermination. Nous craignions de rencontrer des copies entièrement vides mais cela n'a pas été le cas.

Les remarques des rapports précédents s'appliquent encore, et les candidats sont donc invités à les consulter. Suit maintenant une analyse question par question du sujet.

Exercice d'Algèbre

1. Deux questions simples et très largement réussies. Elles visent davantage à mettre les candidats en confiance qu'à les sélectionner. Une quinzaine de copies n'obtient néanmoins aucune bonne réponse ; ces copies s'avèreront souvent les plus faibles par la suite.
2. Premières propriétés.
   (a) Le déterminant de M_a est souvent bien calculé, mais le lien avec la bijectivité et le noyau pose parfois problème. Moins de 40 candidats obtiennent la totalité des points ici.
   (b) Question parfaitement bien traitée par 50% des candidats.
   (c) Prouver que le vecteur $f_a\left((x,y)\right)$ et le vecteur (x,y) avaient la même norme, nécessitait de mener avec patience le calcul. Une cinquantaine de candidats y arrivent. Attention à la tentation de conclure à tout prix qui produit souvent des erreurs telles que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
   (d) Probablement l'une des questions les plus difficiles du sujet, et en conséquence l'une des plus mal résolue. Il faut à la fois accepter l'abstraction de l'énoncé (beaucoup de lettres), en décortiquer la formulation logique (d'où part-on, que veut-on prouver ?), et mettre en œuvre des calculs relativement complexes dans la démonstration. Seules deux copies obtiennent la totalité des points ici.
3. (a) On précisait que les coefficients α et β devaient être **réels**. Le coefficient $\beta = 1$ est souvent repéré (deux tiers des copies), mais les candidats ne pensent pas tous à la formule d'Euler pour simplifier $\alpha = \cos a$.

   Plusieurs candidats remarquent bien que $\alpha = \dfrac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}$, mais ne voient pas que α est réel.
   (b) Le calcul du déterminant est souvent bien mené, et la factorisation souvent bien reliée à la question précédente.
   (c) Près de 50 candidats obtiennent la totalité des points. Concernant les autres, un écueil fréquent à signaler. Ils voient assez souvent le lien avec le déterminant (environ 80 copies) ; mais ils perdent apparemment de vue que les deux questions précédentes (qu'ils viennent juste de traiter !) servaient à factoriser le déterminant pour faciliter la résolution de l'équation $\det(M_a) = 0$.
   (d) On attendait l'explicitation la plus complète possible du lien entre "être valeur propre" et "annuler le déterminant". Souvent les candidats ne reviennent pas à la définition, mais une partie des points sont accordés.
4. Les candidats trouvent, parfois très laborieusement, le spectre de la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ A ce propos : beaucoup résolvent l'équation produit $(5-\lambda)(4-\lambda) = 0$ en **redéveloppant** au lieu d'utiliser l'équation produit. C'est juste mais sous-optimal.
5. La relation $M_{a+b} = M_a M_b$ est correctement prouvée dans près de 90 copies ; à noter qu'un candidat qui avait un doute sur certaines des formules de trigonométrie pouvait éventuellement se ré–assurer ici.
6. Question difficile pour sélectionner entre les meilleurs des candidats. A noter que 16 copies utilisent la question précédente pour trouver la relation $M_a^n = M_{na}$, et que parmi celles-ci seules 6 en déduisent les solutions de l'équation (avec un peu d'indulgence du correcteur sur la formulation du résultat).

Exercice d'Analyse

1. Question simple très discriminante. Une quarantaine de copies donne les bonnes réponses, et une quarantaine ne connaît aucune des valeurs demandées.
2. Même remarque. Parmi les erreurs on lit souvent $\lim_{+\infty} \arctan = +\infty$
3. Question souvent bien traitée (90 copies environ). La totalité des points n'était accordée que lorsque la simplification $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2}$ était effectuée.
4. Question qui redouble quasiment la précédente.
5. La majorité des candidats identifient bien la fonction à dériver et prouvent qu'elle est constante. Ils ne font cependant pas explicitement le lien avec l'énoncé plus haut, ou ne vérifient pas qu'ils travaillent sur un intervalle. En effet comme l'indiquait la mention *on précisera soigneusement les théorèmes employés*, il fallait préciser qu'on utilisait le théorème rappelé en début de sujet, et en vérifier toutes les hypothèses.

   On voit aussi à cette occasion l'invention de nouvelles formules telle que : $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan(ab)$
6. Les candidats ont bien sû intuiter la valeur $-\frac{\pi}{2}$, ce qui est déjà récompensé. La justification n'est pas toujours très rigoureuse cependant.
7. Question difficile. La construction rigoureuse du contre-exemple rapportait tous les points, mais une remarque structurée et témoignant d'une certaine intelligence du problème en rapportait déjà la moitié. Une dizaine de candidats obtiennent des points à cette question.
8. Un nombre relativement important de candidats (35) identifient le taux d'accroissement, et prouvent que $\dfrac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x-0} \to 1$.
9. Question bien traitée par une quinzaine de candidats seulement : le changement de variable à partir de la question précédente s'est avéré difficile .
10. Une quarantaine de candidats parviennent à marquer des points sur cette question plutôt difficile.
    A noter qu'un point était déjà accordé pour le simple fait d'écrire la relation $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan(\dfrac{1}{n})$.

Exercice de Probabilités
1. Cas simplifié où il n'y a que deux urnes

1. Question classique de reconnaissance de loi, réussie par plus de 110 candidats ; attention à bien préciser les **paramètres** de la loi binomiale.
2. On demandait d'exprimer, à l'aide de la variable aléatoire réelle X, l'événement « L'urne a est vide » . Il s'agissait de simple "traduction", et on ne demandait pas de calculer une probabilité ici. Environ 120 candidats y parviennent.
3. Donner la probabilité de l'événement « L'une des deux urnes est vide » nécessitait une formalisation précise :

$$P(\text{Il y a une urne vide}) = P(V_a \cup V_b) = P(V_a) + P(V_b) - P(V_a \cap V_b) = 2 \times \frac{1}{2^5} - 0 = \frac{1}{2^4}$$

   On attendait enfin la simplification $\frac{2}{2^5} = \frac{1}{16}$.

2. Probabilité qu'une urne donnée soit vide

1. Certains candidats confondent l'événement E_i avec son complémentaire.
2. Question très bien réussie, mais les symboles d'intersection et d'union sont parfois confondus pour connecter les événements E_1, E_2, E_3, E_4 et E_5. Dans ce cas de figure, seule la moitié des points est alors attribuée.
3. La multiplication des probabilités est souvent trouvée, mais le mot *indépendance* souvent absent.

3. Calcul de $P(N = 2)$ et $P(N = 3)$.

1. Généralement bien comprise et traitée correctement. Erreurs rencontrées : "l'événement $(N = 3)$ est impossible, donc on ne peut pas calculer sa probabilité" ; "on a $P(N = 3) = \emptyset$".
2. Sauf 15 copies, les candidats parviennent à traduire l'événement $\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c$ en français ; par contre le calcul de sa probabilité n'aboutit pas souvent (37 copies seulement), certains candidats imaginant à tort que les événements V_a, V_b, V_c sont indépendants. Dans cette deuxième partie de la question, nous avons choisi d'accorder tous les points lorsque la **réponse** était juste, sans plus de précision.
3. Bien traité dans la plupart des cas (105 copies) : l'écriture $(N = 2) = (\overline{V_a} \cap V_b \cap V_c) \cup (V_a \cap \overline{V_b} \cap V_c) \cup (V_a \cap V_b \cap \overline{V_c})$, ainsi qu'un passage correct à la probabilité.

   Rarement bien menée (23 copies seulement) : la suite des calculs. Celle-ci fait en effet appel à la question précédente, et ne rapportait aucun point si le résultat de celle-ci était fausse. Rappelons à ce propos que les candidats devraient faire attention à ces questions "carrefour" dont le résultat détermine la suite de tout un exercice ou de toute une partie d'exercice.

4. Espérance de N

1. La loi de Bernoulli est souvent reconnue, rappelons qu'il faut aussi donner son paramètre.
2. Expression correcte trouvée par la moitié des candidats. Parmi les erreurs fréquentes, on rencontre, ici comme ailleurs dans l'exercice, des erreurs de typage telles que : $N = Z_a \cap Z_b \cap Z_c$.
3. L'espérance de N est souvent bien calculée.

5. Loi de N

Cette partie a été correctement traitée par un cinquantaine de candidats.

1. Une trentaine de candidats remarquent bien que la quantité $P(N = 1) + 2P(N = 2)$ est en fait l'espérance de N.
2. Les points n'étaient attribués que si le calcul de $P(N = 2)$ (effectué lors de la question 3.3) était juste. Cette question "récompense" donc en grande partie les candidats ayant largement avancé dans l'exercice.
3. Il s'agissait de se rendre compte que 0 était une valeur possible pour N, et qu'il était nécessaire de calculer $P(N = 0)$.

   La méthode attendue était d'utiliser la relation $P(N = 0) = 1 - P(N = 1) - P(N = 2)$.