

## Rapport sur l'épreuve de Méthodes de Calcul et Raisonnement

L'épreuve de Calcul et Raisonnement de la session 2018 est composée de trois parties indépendantes: Algèbre, Analyse et Probabilités. Ce découpage en trois exercices indépendants correspond à celui du programme.

Les exercices sont de difficulté progressive. Le premier exercice traite un thème récemment introduit dans le programme, l'algèbre euclidienne. L'exercice d'analyse, très guidé dans ses premières questions, est classique. Enfin l'exercice de probabilités, plus long, étudie deux marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}$ . Il commence lui aussi par des questions simples.

Rappelons qu'il n'est pas nécessaire de traiter l'intégralité des questions pour obtenir une note correcte. Par contre, un candidat a tout à fait la possibilité de ne pas aborder certaines questions qu'il juge trop compliquées, afin de mieux se concentrer sur celles dont il est certain. Nous invitons également les candidats à consulter les rapports des années précédentes, dont les remarques sont toujours valables.

### Remarques générales

#### **Rédaction**

Pour les questions les plus faciles, la grande majorité des candidats donne le bon résultat ; la qualité de leur rédaction, elle, s'avère très variable. C'est alors sur ce dernier point que la différence de notation se fait.

Par exemple dans le calcul donnant le nombre dérivé  $P'(x)$ , une courte phrase introductive telle que "Soit  $x$  un nombre réel, calculons  $P'(x)$ " convient tout à fait. D'une manière générale, nous conseillons aux candidats d'éviter d'écrire des formules mathématiques sans aucun contexte; il est recommandé d'introduire explicitement les variables et de préciser les notations, si celles-ci ne le l'ont pas été dans l'énoncé. Au sujet du raisonnement par récurrence, les candidats devraient faire apparaître les mots *initialisation* et *hérédité*, après avoir précisé quelle proposition ils démontrent.

#### **Type/unité des objets mathématiques**

Comme chaque année, nous rappelons aux candidats qu'ils doivent attacher une grande importance au type de l'objet manipulé: fonctions, matrices, scalaires, événements, nombres sont à différencier. Ainsi, écrire qu'un événement est égal à un nombre est considéré comme

une importante erreur de compréhension, à cause de laquelle aucun point n'est en général attribué.

De même, pour  $u$  et  $v$  deux vecteurs, on rencontre dans un certain nombre de copies la notation  $\|u.v\|$ , et on lit que  $u.v$  est un vecteur. Certains candidats confondent aussi variable aléatoire et événement, ou bien envisagent le complémentaire d'une variable aléatoire.

A ce propos, les candidats devraient mieux surveiller les connections entre objets de même type, ainsi que la signification du symbole employé. Prenons un autre exemple rencontré en cours de correction: lorsque  $M$  et  $N$  désignent deux matrices, l'assertion " $M \Leftrightarrow N$ " n'a pas de sens puisque les matrices ne sont pas des propositions (en mathématique, il importe de réserver l'utilisation du symbole équivalent  $\Leftrightarrow$  aux relations entre propositions logiques). Plusieurs copies évoquent aussi la réunion  $P(A) \cup P(B)$ , lorsque  $A$  et  $B$  sont deux événements.

### **Raisonnement**

Les candidats semblent parfois oublier un principe important de l'argumentation mathématique: il s'agit de donner le ou les arguments permettant d'établir que la propriété à démontrer est nécessaire, mais pas davantage que ceux-là.

Déjà dans le rapport de l'an dernier, nous donnions l'exemple du théorème des valeurs intermédiaires, que de nombreux candidats appliquaient à une fonction  $f$  en expliquant qu'elle était *continue et croissante*. Or pour appliquer ce théorème, seule la continuité de  $f$  est importante: la monotonie ne fait pas partie des hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires. Cet élément ne devrait donc pas apparaître dans la réponse, que  $f$  soit monotone ou non.

Ce problème, lié aux arguments inadéquats, reste pleinement d'actualité pour cette session. Citons ainsi quelques exemples parmi de nombreux autres, rencontrés dans les copies :

" $f$  est croissante et continue sur  $[a,b]$ ,  $f(a)<0$  et  $f(b)<0$  donc  $f$  est de signe négatif"

" $f$  est croissante sur  $[-1,0]$  et décroissante sur  $[0,1]$  donc par théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  admet un maximum en  $0$ "

"On a  $a>b$ ,  $a>0$  et  $b>0$  donc  $a-b >0$ ."

Nous suggérons aux candidats de reprendre les trois assertions qui précèdent, et de s'assurer qu'ils savent en supprimer tous les arguments superflus. S'entraîner à la recherche de contre-exemples pourrait peut-être leur permettre de progresser sur ces questions.

## Commentaires sur certaines questions du sujet

### Algèbre

Q2 Seuls 20% des candidats produisent une réponse satisfaisante, qui était que toute matrice symétrique *réelle* (i.e. à coefficients réels) est diagonalisable.

Q4b On rencontre souvent des erreurs dans le calcul de la norme des vecteurs.

Q5, Q6a Les candidats qui réussissent ces questions (environ 40%) remarquent et explicitent que la base  $(e_1, e_2)$  est orthonormale.

Q6b Ceux qui réussissent expriment  $f(u)$  en fonction de  $a$  et de  $b$ , puis calculent la norme.

Q7 Certains candidats développent l'expression, qu'ils factorisent ensuite sous la forme d'un carré, ce qui permet de prouver l'inégalité demandée. Cette preuve n'était pas *déduite* des questions précédentes, mais nous avons choisi de l'accepter également.

Q8a Question ayant posé problème à la moitié des candidats.

Q8b Ceux qui passent par les dérivées partielles ne terminent pas la question, car lorsque la condition nécessaire de point critique est trouvée, ils oublient de vérifier qu'elle est suffisante. Ceux qui réussissent sont ceux qui développent et factorisent  $G(x,y)$ , et sont souvent ceux qui ont réussi la question 7 par le même moyen. Environ 20% des candidats obtiennent tout ou partie des points à cette question, et 5% d'entre eux ont la totalité des points.

### Analyse

Q3 La factorisation attendue pour l'expression  $x^3 - x$  est  $x(x-1)(x+1)$ , et non pas  $x(x^2-1)$ . Environ 15% des copies aboutissent à la factorisation complète.

Q4 Un certain nombre de candidats produisent un tableau de variations faux, de sorte que les réponses données à plusieurs questions de l'exercice sont fausses également. Sur ce genre de question, on ne saurait trop conseiller de se relire et de refaire ses calculs.

Q5 Pour justifier que  $-5$  est maximum de la fonction  $f$  sur  $[-1, 1]$ , des arguments inadéquats sont parfois invoqués: le théorème des valeurs intermédiaires, la continuité ou la dérivabilité de  $f$ , ou encore les valeurs de  $f(1)$  et de  $f(-1)$ .

Ici comme ailleurs, le score à la question était nul si l'argument adéquat était mélangé avec d'autres qui ne l'étaient pas.

Q6 Question réussie par  $\frac{1}{3}$  des candidats.

Attention à bien énoncer les hypothèses du théorème de la bijection si l'on utilise ce théorème. L'intervalle image est donné dans l'énoncé, on attend donc du candidat qu'il explique précisément comment le déterminer. Plus généralement, plus une question donne d'information sur la réponse attendue, plus les candidats devraient s'attacher à détailler leurs arguments.

On lit aussi, à l'occasion de cette question : "D'après le tableau de variations on observe que  $f$  est strictement croissante par produit de fonctions strictement croissantes." Ici et comme dans les autres exemples que nous avons donnés dans ce rapport, le candidat devrait veiller à choisir l'argument qu'il retient. S'appuie-t-il sur le tableau de variations obtenu à la question 4? ou bien est-ce parce que le "produit de deux fonctions strictement croissantes est croissante" (assertion fausse, soit dit en passant) ?

Q7 Question difficile et rarement bien traitée. Le plus simple pour les candidats est encore de prouver que  $f$  réalise une bijection entre l'intervalle  $]-\infty, -1]$  et son image, puis de voir que cette image est incluse dans  $]-\infty, 0[$ .

Q8 Question consistant en une récapitulation des précédentes; peu de candidats font le lien (15% des copies).

## **Probabilités**

### **Partie A**

Q2c Le calcul de la variance est souvent faux.

Q3 Question bien résolue dans 20% des copies. La détermination de la loi pose souvent des difficultés aux candidats.

### **Partie B**

Q1 La loi binomiale est souvent trouvée. Rappelons que lorsque l'on identifie une loi usuelle, il faut préciser son ou ses paramètres: les réponses incomplètes n'apportent aucun point ici.

Q2 et Q3: questions dont les réussites sont fortement corrélées.

Q4 Diverses difficultés avec la formule  $V(aX+b)=a^2 V(X)$ .

### **Partie C**

Dans cette dernière partie, on n'accordait des points à une question que lorsque celle-ci était entièrement bien traitée.

Q1 et Q2a: souvent bien traitées

Q2b: souvent mal traitée (différentes erreurs pouvant entacher le calcul) et ne rapportant donc pas de points.

Q3a, 3b, 3c: souvent une erreur se glisse en 3b, car contre toute attente, *assez peu de candidats parviennent à calculer le terme général d'une suite géométrique indexée par  $N^*$* . Il est vrai que cette question intervient tard dans l'énoncé, on peut donc imputer les erreurs rencontrées au peu de temps restant.

Q4b: Attention, il ne s'agit pas d'une loi de Bernoulli.

Q5: les candidats qui traitent cette question expliquent très bien ce que signifie la somme des variables aléatoires, montrant ainsi leur bonne compréhension de la modélisation du problème.