



## CONCOURS A TB - 2021

---

### RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MÉTHODES DE CALCUL ET RAISONNEMENT

L'épreuve de Calcul et Raisonnement de la session 2021 est composée de trois exercices indépendants les uns des autres, et se voulant chacun de difficulté progressive : Algèbre, Probabilités puis Analyse. Ce découpage correspond à celui du programme.

En Algèbre, on réduit une matrice (qui s'avère être diagonalisable). La suite de l'exercice fait ensuite étudier une famille de matrices vérifiant la relation  $AP = PD$ .

Dans l'exercice de Probabilités, on guide le candidat pour une utilisation de la notion de fonction caractéristique d'une variable aléatoire. On montre dans un cas simple que celle-ci permet de caractériser la loi. Ces notions de fonctions caractéristiques ne sont pas au programme de TB, tout est donc repris élémentairement.

Le dernier exercice (Analyse) est aussi le plus long. Il étudie deux fonctions, définies à partir de la fonction exponentielle. Les fonctions de trigonométrie hyperbolique ne sont pas au programme, et tout est donc redémontré à l'aide des seules connaissances sur la fonction exponentielle et des techniques de dérivation. La toute dernière partie de cet exercice est plus ambitieuse, et donne à étudier une fonction de deux variables.

Le sujet a donc permis de départager les candidats en proposant une variété de questions couvrant tout le programme, dont de nombreuses questions "déjà vues avec le professeur" qu'il fallait (re)connaître puis résoudre.

Les questions les moins réussies sont de deux types : celles où il fallait produire un raisonnement spécifique ; et celles où il fallait se départir des méthodes habituelles de résolution apprises et rabâchées en cours. Le candidat moyen semble réellement pris au dépourvu lorsqu'on lui demande de réfléchir sur des objets abstraits. On constate à ces occasions que les objets et leur nature ne sont pas réellement compris, et que les bases du raisonnement logique sont fragiles. Cela conduit souvent à une production de texte "sans queue ni tête".

A l'inverse la majorité des candidats appliquent correctement les méthodes apprises en cours : cela montre de leur part beaucoup de sérieux et de travail. Si les tous meilleurs produisent d'excellentes copies, les plus faibles (notes inférieures à 5/20) montrent quant à eux des lacunes importantes sur des tâches basiques parfois apprises au collège.

Les remarques des rapports précédents s'appliquent encore, et les candidats sont donc invités à les consulter. Suit maintenant une analyse question par question de la réception du sujet par les candidats, au travers des copies produites.

### **Exercice d'Algèbre**

1. Une question élémentaire, mais déjà discriminante. Si la majorité des copies calcule correctement  $u((1, 0, 0))$ , le fait qu'un vecteur propre doit être non nul n'est presque jamais signalé (seuls 2% des candidats le précisent). De plus, 10% des copies sèchent sur cette question. Enfin, certains candidats perdent du temps en résolvant un système pour déterminer une base de  $\ker(u - Id)$ .

2. Question bien réussie par  $2/3$  des candidats.
3. Dans cette question, on récompensait uniquement la réponse. Ainsi des candidats capables de trouver une réponse juste, mais qui étaient moins à l'aise pour formaliser leur raisonnement, pouvaient être valorisés. Si cette question joue bien son rôle, il est à noter qu'un tiers des copies donnent une réponse fautive. Ainsi la capacité à résoudre des équations très simples semble mise en défaut. C'est d'autant plus dommage qu'il était facile de vérifier que la réponse trouvée était juste.
4. Plus de la moitié des copies donnent les bonnes matrices ; il est à noter que lorsque la réponse était fautive mais cohérente avec les questions précédentes, on a accordé des points (cette dernière situation concerne environ 20% des candidats). Attention à la lecture de l'énoncé, des matrices non diagonales sont parfois proposées pour  $D$  (alors que l'énoncé demandait explicitement une matrice diagonale).
5. Question qui "tombe" plus rarement aux écrits des années précédentes, mais pourtant très classique. Deux stratégies sont empruntées :
  - **Montrer que  $F$  contient le vecteur nul et est stable par combinaisons linéaires.** Le fait que le vecteur nul appartienne à  $F$ , est généralement indiqué par les candidats. Par contre la preuve de la stabilité n'aboutit quasiment jamais. Se dévoilent à cette occasion des problèmes de compréhension de la nature des objets : certains "montrent" ainsi que  $F$  est une "application linéaire".
  - **Exprimer directement  $F$  comme un sous-espace vectoriel engendré.** Ce sont ces rédactions qui s'avèrent les plus convaincantes. Elles ont aussi permis de bien traiter la question suivante.

Au final, une majorité des copies échoue à donner une réponse satisfaisante ; seules 20% des copies obtiennent la totalité des points à cette question pourtant usuelle.
6. La moitié des candidats trouve une base de  $F$ . La justification de la liberté de la famille trouvée est parfois oubliée.
7. Question de calcul matriciel généralement repérée et réussie par les candidats.
8. Question de raisonnement. Ici, on attendait bien la preuve d'une **équivalence**, que ce soit directement en maniant le symbole " $\iff$ ", ou bien par double implication. Très peu de candidats semblent comprendre que ce raisonnement est spécifiquement attendu. Seules les tous meilleurs (10 copies) obtiennent la totalité des points. Les autres candidats ne traitent souvent, au mieux, qu'un sens de l'équivalence.
9. Seules 6 copies produisent un contre-exemple correct.

## Exercice de Probabilités

### Partie A

Les questions 1 et 2 sont généralement bien réussies. Plus difficile est la question 3 (0 points dans  $1/3$  des cas, tous les points dans  $1/3$  des cas). Enfin la question 4 est clivante, sans doute dans la mesure où l'on demande la démonstration d'une implication et non le résultat d'un calcul.

A noter le raisonnement parfois rencontré pour la question 3 : " $E(U) = p$ , donc  $E(2^U) = 2^p$ ".

### Partie B

1. La réponse est souvent trouvée intuitivement, mais la totalité des points n'est accordée que dans une moitié des cas : en effet traduire cette intuition dans le langage précis des probabilités fait défaut à de nombreux candidats. On attendait le mot clé "événements incompatibles" ou "événements disjoints".
2. Question quasiment toujours réussie

3. Même remarque que la question B.1. A noter que 20% des copies ne trouvent pas la réponse correcte, et qu'un bon tiers des candidats trouve la réponse et réussit à la justifier correctement. On constate aussi une confusion entre incompatibilité et indépendance dans certaines copies.
4. Question clivante, mais récompensée : plus d'un tiers des candidats trouvent la réponse correcte.
5. Le théorème de transfert est maîtrisé par un peu plus du tiers des copies.
6. Application des deux questions précédentes, qui est réussie à l'avenant.

### Partie C

1. Une bonne moitié des copies parvient à résoudre ce système avec une rédaction acceptable ; environ 15% des copies ne fournissent pas même la bonne réponse.
2. Encore une question où c'est une démonstration qui est demandée, et non un calcul. Ici on souhaite montrer une implication. On remarque à nouveau que ce type de question pose problème. Ainsi certains candidats montrent la réciproque et non l'implication directe. Sur 151 candidats, 81 choisissent de ne pas traiter la question, 24 copies obtiennent des points à cette question (c'est à dire au moins 0,5 point sur 2), et 4 candidats obtiennent la totalité des points.
3. Même type de remarque. Dans leur grande majorité, les candidats ont des problèmes de compréhension de logique élémentaire.

## Exercice d'Analyse

### Partie A

1. Question réussie par (presque) tous.
2. Question plutôt bien traitée ; nombre de candidats pensent aussi à préciser que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $-x \in \mathbb{R}$ , ce qui a été récompensé. Rédaction parfois rencontrée : "pour tout réel  $x$ , on a  $g(-x) \neq g(x)$ , donc  $g$  est impaire."
3. Les candidats dérivent bien  $x \mapsto e^{-x}$ . De plus, 20% d'entre eux pensent à préciser qu'ils dérivent (par exemple) une composée, ce qui est récompensé.
4. Question souvent bien traitée. Cependant  $f$  et  $g$  sont parfois dérivées avec la formule de dérivation d'un quotient.
5. Mêmes remarques.
6. (a) Question très facile, une dizaine de copies se trompent dans le signe de  $e^{-x}$  et  $e^x$ .  
(b) Attention, les tableaux de signes sous-entendent un produit ; mais ici la fonction est une somme. Question très bien traitée sauf pour une vingtaine de copies.
7. (a) L'enchaînement Q6a, Q6b, Q7a est bien compris et mis en place : une dizaine de copie encore se trompent pour passer de Q6b à Q7a.  
(b) Par contre, passer du sens de variation de  $g$  à son signe s'avère beaucoup plus difficile pour les candidats. Rappelons que les limites de  $g$  en  $\pm\infty$  ne permettent pas à elles seules de trancher quant au signe de  $g$ . Il faut argumenter sur le sens de variation, repérer le(s) point(s) d'annulation de la fonction  $g$ , en déduire une inégalité. Cette démarche plus complexe n'est restituée correctement que dans un quart des copies.
8. Les deux dernières questions de cette partie (8 et 9) sont classiques, et une centaine de copies résume correctement les informations dans le tableau de variation de  $f$ . Globalement, ces questions sont bien traitées par les candidats qui ont correctement traité la question 7b).

## Partie B

1. La valeur de  $\alpha$  est trouvée dans la majorité des copies.
2. Contrairement aux fonctions à dériver dans la partie A, la dérivée de  $f^2$  pose plus de problèmes : un tiers des candidats résout la question.
3. Il fallait avoir résolu la question précédente pour traiter celle-ci. Ces deux questions 2) et 3) sont parfois l'occasion de calculs inutilement longs : certains candidats ont développé  $(f(x))^2$  et  $(g(x))^2$ .
4. Etablir la relation  $f^2 - g^2 = 1$  n'est fait correctement que dans une vingtaine de copies. Certains ne font pas le lien avec la question précédente et entreprennent de simplifier "à la main"  $(f(x))^2 - (g(x))^2$ .

## Partie C

Le calcul différentiel constituait le dernier groupe de questions de cette épreuve. Ce domaine, à en croire les épreuves des années passées, est traditionnellement ressenti comme plus difficile par les candidats.

Cette partie est abordée en général par les meilleures copies. Il est à noter que la correction a généreusement récompensé les candidats qui s'y attelaient.

La question de **cours** Q2c était explicitement identifiée comme telle. Seules 25% des copies y ont répondu correctement. A noter que dans la réponse à cette question la condition nécessaire devient parfois nécessaire et suffisante.