

Concours A BCPST 2016 — Mathématiques
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE

1 Commentaires d'ordre général

Le sujet invitait les candidats à dépasser le simple cadre de leur cours de mathématiques pour ré-exploiter les outils qui y sont développés dans un contexte plus appliqué, ici en particulier les équations de transport, qui si elles ne sont pas explicitement au programme de mathématiques figurent en revanche dans celui de physique. Les candidats n'étaient donc pas en terre inconnue.

Rappelons que l'épreuve est avant tout un problème de *modélisation*, bien plus qu'un problème de mathématiques ou d'informatique. Il est donc tout naturel de s'orienter vers des sujets plus appliqués, où les situations de modélisation abondent; et on peut s'attendre à voir d'autres sujets de cette sorte à l'avenir.

Pour avancer dans le sujet, il convenait de prendre du recul sur les notions abordées, et à ne pas fermer sa réflexion sur les seuls contenus du cours de mathématiques. Des questions faisaient appel à de petites analyses dimensionnelles, d'autres demandaient d'interpréter certains termes d'équations ou des résultats comme des grandeurs physiques : rien de très compliqué, mais on se doit de constater que si la plupart des candidats se sont prêtés à l'exercice sans réticence, et souvent avec des réponses fort pertinentes, d'autres ont semblé déroutés. Il faut reconnaître que le sujet ne se prêtait aucunement au « bachotage » (ce qui le rendait d'ailleurs très intéressant d'un point de vue mathématique, puisqu'il incitait, sans doute beaucoup plus que l'édition précédente, les candidats à construire des argumentations) et que ceux qui ont trop axé leur préparation sur l'apprentissage de formules et de méthodes toutes faites ont sans doute été pris de court. Ce qui, passée une petite phase d'adaptation, ne les a pour autant pas empêchés de finalement avancer dans l'épreuve et de produire des copies intéressantes.

Ce qu'on peut reprocher aux candidats, c'est la difficulté, après avoir donné des heuristiques basées sur des analogies ou des interprétations physiques de certaines quantités, à revenir à une argumentation solide et qui constitue une preuve (au sens mathématique de ce terme) et pas juste une phrase convaincante.

Les copies sont presque toutes soignées et bien présentées. Elles étaient également bien remplies, pour la plupart, et la note maximale a été plusieurs fois attribuée. Un point négatif est à relever, toutefois : comme l'an passé, on a pu trouver des copies presque vides. Et ce n'est pas le sujet qui est en question, mais bien le manque d'aisance en mathématiques. Nous ne saurions encourager les candidats les moins à l'aise dans cette discipline à essayer de répondre à quelques questions, et notamment à bien lire le sujet à la recherche des questions les plus simples. À l'issue de deux années de classes préparatoires, précédées de sept années d'enseignement secondaire, chacun doit être bien conscient qu'aussi peu à l'aise qu'il puisse être, il ou elle est capable de faire un peu de mathématiques. Ajoutons pour ceux qui ne seraient pas encore convaincus que pour gagner des points, il faut avoir essayé de répondre aux questions.

Nous devons finir cette introduction par ce qui devient année après année le point noir des copies : la maîtrise de plus en plus fragile de la langue française. On a déjà signalé dans les rapports des années précédentes une augmentation régulière des fautes d'orthographe et de

grammaire. C'est désagréable pour celui qui lit les copies mais cela va bien au-delà : les erreurs de syntaxe, et notamment la mauvaise utilisation des connecteurs logiques, peuvent rendre un argument faux (si l'on n'arrive pas à identifier la prémisse de la conclusion, par exemple), et (peut-être) pire encore : il devient de plus en plus manifeste que des candidats comprennent « de travers » certaines questions, ce qui les mènent inévitablement à répondre « à côté ».

2 Commentaires question par question

2.1 Première partie

Cet exercice a peut-être dérouté certains candidats, avec les quelques propriétés sur les fonctions de plusieurs variables et les intégrales à paramètres qui étaient admises en début d'énoncé. Cependant, la plupart des questions de l'exercice ne faisaient pas appel à ces notions, et ce qui a posé problème dans de très (trop) nombreuses copies sont des points beaucoup plus élémentaires.

Question 1.1.1. Le ton était donné dès cette première question, qui a vu un très grand nombre de mauvaises réponses, la plupart due à la mauvaise compréhension de la fonction u . Dans plus d'un tiers des copies, les candidats l'ont interprété comme le produit

$$u(x, t) = u_0 \times (x - ct)$$

et non pas comme la composée $u_0(x - ct)$. Il y a beaucoup à dire sur cette erreur. Le plus élémentaire, c'est de constater qu'ensuite (dans les copies où l'erreur a été faite) le terme u_0 est utilisé tantôt comme une fonction, tantôt comme une constante (alors même que l'énoncé mentionne explicitement d'exprimer la dérivée en fonction de u_0') dans les formules de dérivation. Dans tous les cas, si l'on a interprété u comme un produit, on n'arrive pas à répondre à la question suivante, ce qui aurait dû alerter les candidats d'un éventuel souci dans leur réponse.

Mais ce qui focalise le plus l'attention du jury dans cette erreur, c'est l'incompréhension manifeste d'une large partie des candidats face à une notion qui devrait être maîtrisée dans le cours de mathématique (la composition des fonctions) et surtout qui occupe au moins un chapitre entier du cours de physique. Il se peut que certains candidats cloisonnent leurs connaissances par discipline, ayant fait dans cette épreuve une erreur qu'ils n'auraient pas faite dans une épreuve de physique, mais d'autres manipulent sans doute, de manière formelle, des objets dépourvus de signification à leurs yeux. Dans un cas comme dans l'autre, il semble important de travailler, lors de la préparation, des situations concrètes, afin de donner du sens aux outils mathématiques, et surtout afin que ce genre d'écueil ne se reproduise pas à l'avenir. C'était la première question du sujet, et à aucun moment les concepteurs n'ont voulu en faire une question piège...

Question 1.1.2. Pas de problème ici pour les candidats qui avaient la bonne réponse à la question précédente, les autres ont fait preuve de beaucoup d'imagination pour arriver à la bonne conclusion en partant d'un résultat faux. Il est préférable, dans une copie, d'indiquer qu'il y a « manifestement un problème » plutôt que d'ajouter discrètement, en cours de calcul, la quantité qui va bien pour arriver là où l'on veut. Est-il besoin de préciser que les abus de ce genre sont peu appréciés par les correcteurs?

Question 2. On a $u(0, x) = u_0(x)$: la fonction $u(t, x)$ est égale à la fonction u_0 à l'instant $t = 0$, d'où le nom de « condition initiale ». La question a été majoritairement bien

traitée.

Question 3. Voici, après la toute première question, le deuxième endroit qui a mis en lumière les lacunes *mathématiques* d'une partie des candidats. À côté des copies qui donnaient la bonne réponse (et il y en a eu, beaucoup, mais pas majoritaires, c'est pourquoi il est difficile de ne pas insister ici sur ce qui a été mal fait), il y a eu deux types d'erreurs. D'abord, une confusion, assez fréquente, entre radians et degrés. Le coefficient $1/\pi$, ainsi que l'échelle donnée (qui ne permet absolument pas faire apparaître des valeurs de l'ordre de la centaine de degrés!) auraient pourtant dû faire réfléchir les candidats qui n'utilisaient pas la bonne unité. Plus généralement, certains candidats ne connaissent tout simplement pas la courbe de la fonction arc-tangente, et ne sont donc pas en mesure de s'apercevoir que le tracé qu'ils obtiennent à la calculatrice n'est pas cohérent.

La deuxième erreur a déjà été mentionnée à la première question : u_0 a souvent été, ici aussi, considérée comme un facteur multiplicatif, et les dessins de $x \mapsto u(1, x)$ et $x \mapsto u(2, x)$ sont alors totalement faux. Encore une fois, l'énoncé donnait pourtant un moyen de vérification en parlant « d'équation de transport » : on attendait simplement du candidat qu'il remarque que les courbes s'obtiennent les unes à partir des autres par translations horizontales.

Terminons sur une note plus positive : plusieurs copies montraient des courbes bien dessinées, sur lesquelles on voyait clairement apparaître le phénomène de translation. Il est très agréable de voir des graphiques réalisés proprement, et les candidats qui prennent une ou deux minutes pour les produire sont évidemment valorisés par rapport à ceux qui se contentent d'un vague croquis à main levée (axes non tracés à la règle, courbes de fonctions approximatives au point de montrer de légers « retours en arrière », etc.).

Question 4. Fort heureusement, les nombreux candidats qui avaient jusqu'ici confondu produit et composition se sont repris à partir de cette question et jusqu'à la fin de la partie. Pour cette question une fois encore, on a pu voir dans les copies de très bons dessins.

Il peut sembler déplacé d'insister autant sur les qualités « plastiques » des copies, et cependant il est indéniable que les dessins les mieux réalisés vont (en général) de pair avec les candidats ayant le plus de recul sur le problème, et une meilleure compréhension de celui-ci. Allons plus loin : il semble que certains candidats aient plus l'habitude que d'autres de tracer des courbes ou des schémas pour représenter des situations mathématiques; ils constituent pourtant une aide précieuse à la visualisation — et donc à la compréhension — des différents objets.

Question 5. Le fluide s'écoule « vers la droite » n'a de sens que si le dessin de la question précédente est correctement réalisé. La réponse a été en principe acceptée, mais dire « vers les x croissants » semble plus solide. En revanche plusieurs candidats ont affirmé qu'étant une vitesse, c ne pouvait être que positif. C'est évidemment faux : les vitesses, sauf si l'on considère seulement leurs normes, sont des grandeurs algébriques, qui précisément indiquent un sens de déplacement.

Question 6. Ici il faut résoudre des équations différentielles élémentaires. La plupart du temps les bonnes réponses ont été données, avec une bonne rédaction concernant la détermination des conditions initiales.

Toutefois, quelques candidats ont donné comme réponses des fonctions exponentielles, confondant sans doute les équations $y' = y$ avec $y' = \text{cste}$.

Question 7.1. La réponse attendue, idéalement, était : on multiplie u , qui est une surface, par ds , qui est une longueur (infinitésimale), ce qui donne un volume (infinitésimal).

L'intégrale réalise la somme de ces petits volumes, pour obtenir encore un volume (mais plus infinitésimal cette fois-ci). Beaucoup de candidats ont fait cette analyse dimensionnelle, et sont ainsi parvenus à la bonne réponse. D'autres, encouragés par une question où l'on ne demandait pas explicitement une justification, semblent s'être contentés d'une réponse au hasard, et ont parlé de vitesse (qui c'est vrai, commence aussi par un V). Il est dommage de laisser partir les points attribués à cette question, quand une petite réflexion permettait de les assurer.

Question 7.2. Il fallait ici utiliser un changement de variable. Cela a été bien fait en général.

Question 7.3. C'est dans cette question qu'il fallait recourir aux règles admises en début d'énoncé. Les rédactions proposées ont souvent été bonnes; cette question, déjouant tous les pronostics, a posé bien moins de problèmes que les questions 1 et 3 qui sont pourtant bien plus élémentaires (en tout cas au niveau des objets manipulés).

Question 8.1. Le volume de fluide ne varie pas, c'est-à-dire le fluide est incompressible. C'est tout ce qu'on attendait, mais trop peu de candidats ont su faire cette remarque.

Question 8.2. Il n'y a plus aucun calcul à faire dans cette question : seulement à mettre bout à bout les résultats précédents. Il semble que les candidats qui n'ont pas réussi à l'aborder ont simplement manqué de la lucidité nécessaire pour s'en rendre compte. Peut-être certains d'entre eux sont mal à l'aise lorsque les notations (et c'était le cas dans ce problème, avons-le) sont un peu élaborées.

Dans certaines copies, les candidats sont partis du fait que u était solution de l'équation, alors que c'est ce que l'on cherche à établir. Il ne faut pas hésiter à bien relire l'énoncé en cours de résolution, et s'efforcer à garder un certain recul, en permanence, sur ce que l'on est en train de faire.

Question 9.1. Il fallait ici utiliser une autre propriété bien connue des intégrales : la relation de Chasles. Manifestement, celle-ci ne pose pas de problèmes aux candidats, c'est bien; pourtant dans un nombre finalement non négligeable de copies, les propriétés, si elles sont bien appliquées, sont mal nommées : on voit ainsi les mots « linéarité de l'intégrale » en lieu et place de « relation de Chasles », alors que le calcul qui est fait est le bon.

Question 9.2. On attendait ici l'utilisation du taux d'accroissement : si cette limite existe, on a

$$G'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x_0+h) - G(x_0)}{h}.$$

Or d'après la question précédente le numérateur est identiquement nul, donc la limite existe, G est dérivable, et sa dérivée est nulle.

Quelques candidats se sont lancés dans une argumentation pas toujours très claire pour déduire de la question précédente que G est constante, d'autre encore (plus rares) sont repartis dans un calcul avec les intégrales à paramètres. Cela ne menait à rien de bon.

Question 10. Les candidats qui ont abordé cette dernière question l'ont en général bien traitée. Il fallait remarquer que G est en fait une intégrale fonction de sa borne supérieure, donc en fait n'est rien d'autre que la primitive de son intégrande. Un argument de translation était encore à utiliser avant de pouvoir conclure.

2.2 Deuxième partie

Cette deuxième partie était un exercice de programmation. Comme le rapport de l'année précédente le laissait entendre, cette partie informatique était plus conséquente, tant en nombre de questions que par son poids dans le barème, que celle de l'édition précédente. Elle

a également été beaucoup mieux traitée, c'est tout à fait satisfaisant.

Signalons quand même encore quelques (rares) cas de copies où cette partie a été ignorée. Les quelques candidats concernés visent là une stratégie bien discutable, au regard des points qu'ils laissent ainsi échapper.

Question 1.1. Cette première question ne présentait aucune difficulté, en tout cas dans l'idée des concepteurs. Il s'en est pourtant avéré une : comprendre la signification de $u_0(x) = \mathbf{1}_{]-\infty; 1]}(x)$. Beaucoup de candidats ont très mal interprété la fonction caractéristique (ou indicatrice), ce qui est surprenant, vu que ces fonctions interviennent dans le cours de probabilités.

D'autres ont réutilisé la fonction u_0 de la question 3 de la partie précédente. Cela montre un manque de concentration évident.

Question 1.2. Ici il était question d'une recherche de maximum. La valeur absolue a été quelque fois oubliée, mais la vraie difficulté de la question était de ne pas ajouter d'arguments superflus à la fonction : on donne une matrice M et un indice de ligne i , et on *cherche* un indice de colonne j pour lequel une certaine quantité est maximale. C'est donc le programme qui doit calculer ce j , et renvoyer la valeur absolue du coefficient correspondant dans la matrice.

Question 2.1.1. Les quatre lignes indiquées initialisent la première ligne et la première colonne de U . Cette question n'a pas posé de problème.

Question 2.1.2. On voulait tester dans cette question la connaissance de la syntaxe particulière du `range(a, b)` en Python, qui décrit l'intervalle d'entiers $\{a, a+1, \dots, b-1\}$, c'est-à-dire borne de droite exclue. La question a été bien traitée, et les justifications données étaient pertinentes.

Question 2.2.1. Cette question était un « vrai/faux ». Les réponses non justifiées n'apportaient aucun point. La question a été globalement bien traitée : sans doute le fait de devoir justifier les réponses excluait les réponses données au hasard.

Dans quelques copies cependant, on continue à voir (comme l'an dernier) trois mauvaises réponses sur les trois affirmations, avec des justifications données qui parfois citent pourtant le bon argument, mais en l'interprétant à l'envers. Il faut encourager, dans la préparation, les exercices d'analyse de programmes, afin que chaque candidat soit capable de lire — et de comprendre — un programme simple.

Citons enfin une erreur rencontrée plusieurs fois : la confusion entre les constantes `True` ou `False`, qui sont des *booléens* (c'était la réponse attendue dans le **b**), et les chaînes de caractères `"True"` ou `"False"` qui *ne sont pas* des booléens. La différence cruciale est que les booléens peuvent être réutilisés dans des structures conditionnelles, alors que les chaînes non (à moins d'écrire des horreurs comme `if b == "True"` et que le jury ne souhaite surtout pas voir dans les copies).

Question 2.2.2. L'appel `Stable(U)` teste si quel que soit j , le plus grand des $|u_{i,j}|$ est atteint pour $i=0$, et renvoie un booléen pour le dire. Il fallait pour arriver à cette réponse expliquer le rôle de chaque programme auxiliaire. Cela a été très souvent très bien fait.

Question 3.1. Cette question ne concernait pas la programmation : il fallait reconnaître la courbe de la fonction u_0 , et ses translatées (vers la droite lorsque $t > 0$) $x \mapsto u_0(x-t)$. On pouvait aussi s'en sortir en calculant des valeurs particulières. Beaucoup de bonnes réponses ont été données.

Question 3.2. On attendait ici, bien qu'avec une justification, une réponse assez naïve : plus il

Il y a de points dans la discrétisation, plus la courbe doit s'approcher de celle de la solution exacte. D'après la question précédente, la solution exacte est le créneau et c'est donc la courbe en pointillés qui s'en approche le plus.

C'était la justification attendue, mais elle reste évidemment discutable : on admet tacitement que la méthode numérique, proposée dans l'exercice, converge vers la solution exacte, sinon le raisonnement ne tient évidemment plus.

2.3 Troisième partie

C'était l'exercice le plus difficile. Il a été peu abordé, hormis les questions 1 et 9. De très rares candidats ont commencé par cette partie, sans pour autant en traiter une quantité substantielle.

Question 1.1. Le bon argument, souvent donné, était : « pour que la particule soit en position x_i à l'instant τ , il faut qu'elle ait été en position x_{i-1} ou x_{i+1} à l'instant 0 ». À côté de cette bonne réponse ont été vues des tentatives de justifications sans lien avec l'objet de la question, notamment certains candidats ont parlé d'indépendance, alors que celle-ci n'a pas de raison d'être mentionnée tant qu'on ne passe pas au calcul des probabilités.

Question 1.2. On reproduit le raisonnement de la question précédente à un instant quelconque, et seulement après on passe au calcul des probabilités. Attention à bien justifier chaque étape du calcul séparément : on ne dit pas dès le départ « par incompatibilité et par la formule des probabilités composées », suivi du calcul; on indique chaque hypothèse là où l'on s'en sert.

Question 1.3. Il y avait ici une erreur dans l'énoncé : la formule à démontrer était

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{E}(X_n) + (p - q)h.$$

Une brève analyse dimensionnelle permettait de repérer l'erreur (X_n étant homogène à une longueur). Lorsqu'on utilise la définition

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i \mathbf{P}(n\tau, i),$$

il convient de remarquer que la somme est en fait finie, car la particule, au bout de n étapes, ne peut s'être éloignée de plus de n graduations de l'origine.

Question 1.4. Comme la plupart des candidats l'ont remarqué, la suite $(\mathbf{E}(X_n))_{n \geq 0}$ est arithmétique de raison $(p - q)h$, et de premier terme x_0 . On peut supposer que les candidats qui n'ont pas vu que la suite était arithmétique ont été perturbés par les notations. Il ne faut pas être déstabilisé par le fait que la suite ne s'appelle pas $(u_n)_{n \geq 0}$...

Question 1.5. On a

$$\mathbf{E}(Y_n) = \frac{x_0}{n\tau} + \frac{(p - q)h}{\tau}.$$

Il s'agit d'une vitesse (quantité homogène à une longueur divisée par un temps), en fait la vitesse moyenne de la particule. On remarque au passage que l'un des deux termes tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, et donc on peut voir $(p - q)h / \tau$ comme la vitesse moyenne asymptotique.

Question 2. La réponse attendue, et donnée en général par les candidats qui ont traité la question, était : la marche est sans biais car on va avec même probabilité à droite ou à gauche.

Question 3. Voilà une question calculatoire : il s'agissait d'appliquer la formule de Taylor-Young. Parmi les candidats qui ont traité la question, beaucoup l'ont bien fait. Quelques candidats se trompent dans la formule, alors qu'on n'avait pas besoin d'aller plus loin que l'ordre 2. C'est bien regrettable ...

Question 4. Le long calcul se trouvait dans la question précédente, il faut ici revenir à une argumentation : on attend des candidats qu'ils indiquent clairement qu'ils utilisent l'unicité du développement limité pour identifier les deux expressions.

Question 5. Le sujet amenait ici le candidat à faire une analogie avec le modèle logistique. La réponse attendue était par exemple : si n est une espèce animale, alors $rn(1-n)$ est un terme source, avec effet de seuil.

Questions 6 et 7. Elles ont été peu traitées, mais les quelques candidats qui les ont abordées ont donné d'excellentes réponses.

Question 8. Voilà une question qui était difficile, et l'indication de l'énoncé n'aidait pas forcément. Voici une solution élémentaire : pour chaque entier naturel n posons $x_n = n$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_n \in]x_n ; x_{n+1}[$ tel que

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = |f'(\xi_n)| \times |x_{n+1} - x_n|,$$

or $x_{n+1} - x_n = 1$ d'après la définition qu'on en a donné, et donc pour tout $n \geq n_0$ on a

$$|f'(\xi_n)| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)|$$

La relation $\xi_n > x_n$ assure que ξ_n tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f converge vers une limite L et que $x_n \rightarrow \infty$, on a

$$f(x_{n+1}) - f(x_n) \rightarrow L - L = 0,$$

et ainsi il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on a $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \varepsilon$, et donc

$$|f'(\xi_n)| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \varepsilon.$$

Ceci prouve que $f'(\xi_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Question 9.1. Il fallait ici reprendre la relation de la question 7. Quelques candidats s'en sont très bien tirés.

Question 9.2. Ici on appliquait la relation de la question précédente aux ξ_n de la question 8, avant de faire tendre n vers l'infini. La relation se présentait alors d'elle-même, et à nouveau plusieurs candidats ont très bien rédigé cette question.

Question 9.3. Contre toute attente, cette question, qui ne demande plus qu'une modeste étude de la fonction $\lambda \mapsto (\lambda^2 + 1) / \lambda$, ou encore l'utilisation astucieuse d'une identité remarquable, a été assez mal traitée par une bonne partie des candidats qui l'ont abordée. Il est surprenant de voir des copies dans lesquelles des réponses très pertinentes ont été données à des questions ardues, et qui pêchent sur ce genre de détails!