Banque « Agro-Véto »
A - 0214

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE A

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Le sujet comporte deux problèmes totalement indépendants.

Problème 1 : Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Soit $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E, F un sous-espace vectoriel de $(\mathrm{E}, +, \cdot)$.

On dit que F *est stable par* f si et seulement si : $\forall \vec{x} \in \mathrm{F}\,,\ f(\vec{x}) \in \mathrm{F}$.

1. Quelques calculs préliminaires.

Considérons la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.

1.1 Étude des éléments propres de M.

1.1.1 Déterminer les (ou la) valeurs propres de M.

1.1.2 Déterminer les sous-espaces propres de M.

1.2 Étude des éléments propres de ${}^t\mathrm{M}$, ${}^t\mathrm{M}$ désignant la transposée de la matrice M.

1.2.1 λ appartenant à $\mathbb{R}$, montrer que les matrices $\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}_3$ et ${}^t\mathrm{M} - \lambda\mathrm{I}_3$ ont le même rang.

En déduire les valeurs propres de ${}^t\mathrm{M}$.

1.2.2 Déterminer les sous-espaces propres de ${}^t\mathrm{M}$.

2. Quelques généralités.

Soit $(\mathrm{E},+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E.

2.1 Sous-espaces vectoriels triviaux stables par f.

Montrer que $\{\vec{0}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathrm{E},+,\cdot)$ stables par f.

2.2 Soit F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{\vec{0}\}$ et de dimension finie, notons p la dimension de F et introduisons $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une base de F.
Montrer que F est stable par f si et seulement si : $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f(\overrightarrow{u_k}) \in \mathrm{F}$.

2.3 Droites vectorielles stables par f.

Soit F un sous-espace vectoriel de $(\mathrm{E},+,\cdot)$ de dimension 1 et introduisons $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = (\vec{u})$ une base de F.

Montrer que F est stable par f si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur propre de f.

3. Étude des plans stables en dimension 3.

Soit $(\mathrm{E},+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ une base de E,
f un endomorphisme de E et notons A sa matrice dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$,
F un sous-espace vectoriel de $(\mathrm{E},+,\cdot)$ de dimension 2.

3.1 Mise en place de l'équation de F dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$.

Soit $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ une base de F.

3.1.1 Justifier l'existence d'un vecteur $\overrightarrow{u_3}$ de E tel que la famille $\mathcal{U}_{\mathrm{E}} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ soit une base de E.

3.1.2 Introduisons alors la matrice de passage Q de la base $\mathcal{U}_{\mathrm{E}}$ à la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$ (attention à l'ordre des bases !) que nous noterons :

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{pmatrix} .$$

Montrer que a, b et c sont non tous nuls.

3.1.3 Soit $\vec{x}$ appartenant à E,

notons : $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$,

et : $\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{U}_{\mathrm{E}}$.

Rappeler le lien matriciel entre Q , X et X′,
et en déduire que : $x'_3 = a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3$.

3.1.4 En déduire que pour tout vecteur $\vec{x}$ appartenant à E de composantes (x_1, x_2, x_3) dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$:

$$\vec{x} \in \mathrm{F} \Leftrightarrow a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0\,,$$

la condition $a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3 = 0$ est appelée *l'équation de* F *dans la base* $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$, nous admettrons qu'elle est indépendante du choix de la base $\mathcal{U}_{\mathrm{E}}$.

3.2 Condition nécessaire et suffisante de stabilité de F par f.

3.2.1 Dans cette question, nous supposons F stable par f.
Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{U}_{\mathrm{E}}$, matrice que nous noterons B dans la suite, est de la forme :

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \ , \ (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma) \in \mathbb{R}^7 \, .$$

Après avoir justifié l'égalité matricielle : ${}^t\mathrm{Q}\,{}^t\mathrm{B} = {}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{Q}$,
en déduire que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}$.

3.2.2 Réciproquement, supposons que le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de ${}^t\mathrm{A}$ de valeur propre λ.
Justifier l'égalité matricielle : $(a \quad b \quad c) \times \mathrm{A} = \lambda \ (a \quad b \quad c)$.
Soit $\vec{x}$ appartenant à E,
notons : $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$,
et : $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$.
Montrer que : $a\,y_1 + b\,y_2 + c\,y_3 = \lambda\ (a\,x_1 + b\,x_2 + c\,x_3)$.
En déduire que F est stable par f.

4. Soit $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de E, nous considérons alors l'endomorphisme f de E tel que sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$ soit la matrice notée M définie par :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $(\mathrm{E}, +, \cdot)$ stables par f.

Problème 2 : Étude d'une fonction définie par une intégrale.

Le plan affine usuel est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.
Nous considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \, , \ f(x) = \frac{\ln(x)}{1 + x^2} \, .$$

1. Étude de la fonction f.

1.1 Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\; g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)\,.$$

1.1.1 Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.1.2 Montrer que l'équation $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet une unique solution notée α dans la suite.

1.1.3 En déduire le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.2 Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Étude de la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
Dans la suite, F désigne la primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\; \mathrm{F}(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

2.1 Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.2 Étudions la limite de F en 0.

2.2.1 Considérons la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\; u(x) = \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\,.$$

Montrer que u est prolongeable par continuité en 0.
Dans la suite, u désigne la fonction ainsi prolongée en 0. u est désormais une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.2.2 Par une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\; \mathrm{F}(x) = \mathrm{Arctan}(x)\ln(x) - \int_1^x u(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2.2.3 En déduire que F admet une limite en 0 et que cette limite est égale à $\displaystyle\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ en 0.
Nous décidons alors de prolonger F par continuité en 0 en posant :

$$\mathrm{F}(0) = \int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

la fonction F est désormais définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2.3 Calculons une valeur approchée de F(0).

2.3.1 Soit x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, k appartenant à $\mathbb{N}$. Calculer :

$$\mathrm{I}_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

2.3.2 Montrer que pour tout entier naturel n :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,.$$

2.3.3 Soit n appartenant à $\mathbb{N}$.
Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[\,,\ \mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{I}_{2k}(x) + (-1)^{n+1} \int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

En déduire que :

$$\forall x \in]0,1[\,,\ \left| \mathrm{F}(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{I}_{2k}(x) \right| \leqslant \mathrm{I}_{2n+2}(x)\,.$$

2.3.4 En déduire que :

$$\left| \mathrm{F}(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leqslant \frac{1}{(2n+3)^2}\,.$$

2.3.5 Nous décidons de choisir comme valeur approchée de $\mathrm{F}(0)$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n peut-on affirmer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ est une valeur approchée de $\mathrm{F}(0)$ à 10^{-4} près ?
Écrire un algorithme dans le langage de votre choix, pseudo-langage inclus, qui calcule une valeur approchée de $\mathrm{F}(0)$ à ε près , ε étant un réel strictement positif choisi par l'utilisateur.

2.4 Étudions la dérivabilité de F en 0.

2.4.1 Déterminer la limite de F' en 0.

2.4.2 Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de F en 0 ? Interpréter géométriquement ce résultat.

2.5 Étudions la limite de F en $+\infty$.

2.5.1 Montrer par changement de variable, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{F}(x)\,.$$

2.5.2 En déduire la limite de F en $+\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

2.6 Tracer la courbe représentative de F.

*** **FIN** ***