

Le sujet suivant a été posé lors de la session 2015 à l'épreuve « Argumentation – Echange » des Concours Agronomiques et Vétérinaires, pour le thème à dominante Physique.

Le corrigé proposé doit être lu comme un guide exhaustif à destination de l'interrogateur. Puisqu'il s'agit d'une question ouverte, il importe de prévoir un cadre commun le plus complet possible afin que les questionnements auxquels celle-ci conduit aient été envisagés.

Interpréter le corrigé comme le déroulement que le jury exigerait d'un candidat serait un contresens. La question ouverte est la trame de fond permettant au jury de conduire une évaluation par compétences, où divers champs sont jugés à tour de rôle.

Le corrigé comprend un faisceau préétabli de questions et des remarques à destination des interrogateurs. Bien entendu, le jury adapte ensuite ses questions au déroulement particulier de chaque échange, aux réactions des candidats et aux pistes de résolution qu'ils proposent.

Les compétences d'interaction et de communication (maîtrise de l'argumentaire oral, capacité à participer à un échange avec l'interrogateur) sont évaluées en continu lors de l'épreuve.

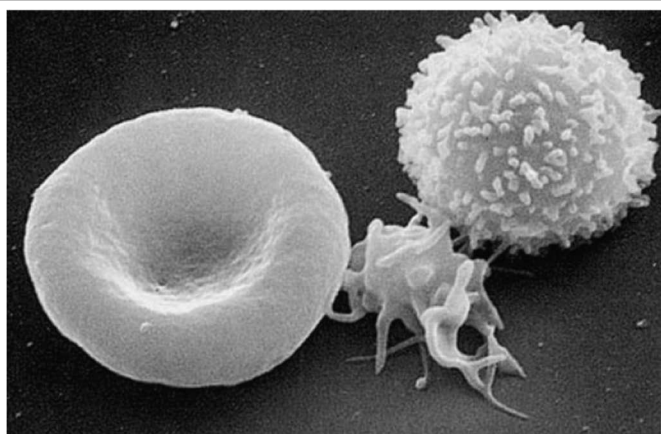
Concours Agronomiques et Vétérinaires
Concours A - BCPST
Epreuve « argumentation – échange »

Examen sanguin

La Vitesse de Sédimentation fait partie des examens de routine effectués au cours d'un bilan sanguin permettant de détecter des phénomènes inflammatoires ou infectieux.

La Vitesse de Sédimentation à la première heure correspond à la hauteur (exprimée en millimètres) de globules rouges ayant sédimenté en une heure au fond d'un tube à essai, le sang ayant été rendu incoagulable.

Déterminer la fourchette dans laquelle doit se trouver la vitesse de sédimentation à la première heure d'un sang sain.



Doc. 1 : Aspect, en microscopie électronique à balayage, des cellules du sang : de gauche à droite, érythrocyte, plaquette et leucocyte (source Wikipedia)

Cellules	Dimension	Numération ($10^3 / \text{mm}^3$)
Erythrocytes (globules rouges)	De 6,8 μm à 7,3 μm	De 4500 à 6000
Thrombocytes (plaquettes)	De 2 μm à 4 μm	De 150 à 450
Leucocytes (globules blancs)	De 4 μm à 12 μm	De 4 à 10

Doc. 2 : Caractéristique des cellules du sang

On attachera en particulier de l'importance aux points suivants :

- ✓ *Prendre appui sur le document photographique fourni afin de déterminer les paramètres utiles du problème.*
- ✓ *Formuler une analyse critique du modèle choisi.*
- ✓ *Estimer les ordres de grandeur nécessaires à la résolution numérique du problème. Les valeurs d'autres grandeurs que vous estimez pertinentes pourront être fournies par l'examineur.*

L'entretien avec l'examineur a notamment pour but de dégager des pistes de réflexion afin de :

- ✓ *dégager une problématique,*
- ✓ *proposer des hypothèses permettant de construire des modèles simples.*

Correction

Ordres de grandeur à connaître ou déterminer :

Hauteur d'un tube à essais	$L = 70 \text{ mm}$
Diamètre d'un tube à essais	$d = 12 \text{ mm}$
Accélération de la pesanteur	$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Valeurs à fournir au candidat :

Masse volumique du plasma	$\rho_p = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Masse volumique des globules rouges	$\rho_g = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Viscosité dynamique du plasma	$\eta_p = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Coefficient de diffusion des globules dans le plasma	$D \approx 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Analyse du problème

- ✓ *Quelle est la dimension de la Vitesse de Sédimentation ?*
- ✓ *Quel est l'élément figuré majoritaire dans le sang ?*
- ✓ *Lors de la sédimentation, comment peut-on modéliser le sang ?*

La Vitesse de Sédimentation recherchée n'est pas une vitesse mais une hauteur.

On peut cependant exprimer cette grandeur en mm/h (puisque'il s'agit de la hauteur de globules rouges ayant sédimenté en une heure), ce qui justifie son appellation.

Il peut être nécessaire de préciser que le plasma est la composante liquide du sang dans laquelle se trouvent les éléments figurés.

Les globules rouges forment, en volume, d'après le Doc. 2, approximativement 95 % des éléments figurés. En conséquence, dans la suite, on ne prendra en considération que ce type de particule, à l'exclusion des deux autres.

Lorsque le sang est laissé au repos dans une éprouvette, les globules sédimentent, c'est-à-dire s'accumulent au fond du tube à essais. Le sang se comporte donc comme un fluide (le plasma, très proche de l'eau en terme de composition) contenant des éléments solides réparti initialement de manière homogène. Dans ce milieu fluide, les globules subiront une force de frottement \vec{f} .

Il faut déterminer le mouvement des globules afin de déterminer la hauteur de globules se trouvant au fond du tube à essais.

Concevoir un modèle, une démarche

- ✓ *Quelle force provoque la sédimentation des globules ?*
- ✓ *Quelle grandeur caractéristique du mouvement des globules doit être connue pour évaluer la Vitesse de Sédimentation ?*
- ✓ *Quel théorème appliquer pour la déterminer ?*
- ✓ *À quelles forces est soumis un globule ?*

Il s'agit de déterminer l'équation différentielle vérifiée par la vitesse d'un globule.

Pour cela, il faut appliquer le principe fondamental de la dynamique à un globule rouge, dans le référentiel de l'éprouvette supposé galiléen.

Choix du repère : on note \vec{u}_z le vecteur unitaire descendant et on place l'origine à la position de départ du globule.

Notation des paramètres physiques pertinents :

- V : volume du globule.
- ρ_g : masse volumique des globules rouges
- ρ_p : masse volumique du plasma
- $\vec{g} = g\vec{u}_z$: accélération de la pesanteur
- η_p : viscosité dynamique du plasma

Les forces s'exerçant sur le globule sont :

- Son poids : $\vec{P} = \rho_g V g \vec{u}_z$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\pi} = -\rho_p V g \vec{u}_z$
- La force de frottement exercée par le plasma sur le globule : \vec{f}

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\rho_g V \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \rho_g V g \vec{u}_z - \rho_p V g \vec{u}_z$$

Exploiter des informations : évaluation du volume d'un globule

- ✓ *Comment exploiter les documents pour évaluer la dimension d'un globule ?*

Il est alors nécessaire d'évaluer le volume du globule : sur le Doc. 1, on peut constater qu'il a approximativement la forme d'un cylindre évidé. La dimension d'un globule rouge donné dans le tableau (Doc 2) fournit une échelle. Il est alors possible de considérer le globule rouge comme un cylindre dont on peut évaluer les dimensions sur le Doc. 1 : rayon extérieur $R_e = 3,5 \mu\text{m}$, intérieur $R_i = 1,8 \mu\text{m}$ et hauteur $H = 1,4 \mu\text{m}$. On obtient alors un volume $V = (\pi R_e^2 - \pi R_i^2)H = 40 \mu\text{m}^3$.

Note au jury : toute autre géométrie pertinente que proposerait le candidat sera acceptée. L'application numérique sera fournie au candidat.

Force de frottement

- ✓ *Quel type de force de frottement peut-on envisager ?*

Pour la force de frottement, on peut envisager la force de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta_p r \vec{v}$. Pour simplifier, on assimilera le globule à une particule sphérique de rayon $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 2,1 \mu\text{m}$.

Note au jury : l'application numérique sera fournie au candidat.

Confronter un modèle au réel

- ✓ *Les conditions d'application de la loi de Stokes sont-elles satisfaites ?*

La loi de Stokes est valable pour une particule sphérique (ce qui n'est pas rigoureusement le cas ici) et un nombre de Reynolds $Re = \frac{2\rho_p r v}{\eta_p}$ inférieur à 1.

Pour évaluer le nombre de Reynolds, il faut estimer l'ordre de grandeur de la vitesse du globule. On peut alors considérer qu'une part non négligeable des globules a sédimenté en 1 h et donc qu'ils ont parcouru une proportion non négligeable de la hauteur du liquide contenu dans le tube à essais. On peut alors proposer un ordre de grandeur de la hauteur du tube à essais ($L = 70 \text{ mm}$) et donc de la distance parcourue en $T = 1 \text{ h}$. On en déduit une vitesse moyenne de $v = \frac{L}{T} \approx 2.10^{-5} \text{ m.s}^{-1}$.

Note au jury : tous ordres de grandeur pertinents (L, T) que proposerait le candidat seront acceptés. L'application numérique sera fournie au candidat.

Il est alors possible d'évaluer le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{2rv\rho_p}{\eta_p} = 5.10^{-5} < 1$$

Note au jury : l'application numérique sera fournie au candidat.

Limites du modèle

Compte tenu des dimensions des globules par rapport à celles du tube, ceux-ci peuvent être considérés comme loin des parois.

En revanche, en considérant $n = 6.10^6$ globules par $\text{mm}^3 = 6.10^{15} \text{ m}^{-3}$, chacun occupe un volume propre $V_g = \frac{1}{n} = 1.7.10^2 \mu\text{m}^3$, ce qui correspond à un cube de côté $a = V_g^{1/3} = 5,5 \mu\text{m}$. Cette valeur est du même ordre de grandeur que la taille d'un globule rouge. La loi de Stokes trouve ainsi ici ses limites.

En la conservant pour la suite, on ne pourra donc estimer qu'un ordre de grandeur de la Vitesse de Sédimentation dans le cadre de ce modèle.

Note au jury : les applications numériques seront fournies au candidat lorsque les expressions littérales auront été établies.

Par ailleurs, les globules peuvent s'agglomérer, formant des particules beaucoup plus volumineuses, ce dont nous ne tiendrons pas compte ici.

Réaliser un calcul littéral

✓ Quelle équation régit l'évolution de la vitesse $v(t)$ d'un globule rouge ?

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\rho_g V \frac{d\vec{v}}{dt} = -6\pi\eta_p r \vec{v} + \rho_g V g \vec{u}_z - \rho_p V g \vec{u}_z$$

En posant $\vec{v} = v \vec{u}_z$, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\rho_g V \frac{dv}{dt} + 6\pi\eta_p r v = \rho_g V g - \rho_p V g$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta_p r}{\rho_g V} v = \frac{\rho_g - \rho_p}{\rho_g} g$$

Introduire des paramètres physiques pertinents.

- ✓ Quelles sont les grandeurs utiles à extraire de l'équation différentielle ?

On pose la constante de temps $\tau = \frac{\rho_g V}{6\pi\eta_p r}$ et la vitesse limite $v_l = \frac{\rho_g - \rho_p}{6\pi\eta_p r} gV$ (obtenue dans l'équation différentielle lorsque $v = \text{Cte}$).

Réaliser un calcul numérique

Numériquement, $\tau = 8,2 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ et $v_l = 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Note au jury : le candidat devra s'enquérir des valeurs numériques des grandeurs pertinentes.

Proposer des simplifications pertinentes. Formuler des hypothèses.

- ✓ Pour déterminer alors la Vitesse de Sédimentation, quelle première approximation simple pourrait-on réaliser ?

La résolution de l'équation différentielle ne présente alors aucun intérêt: compte tenu de la valeur de la constante de temps ($\tau \ll \Delta t = 1 \text{ h}$), les globules se déplacent tous à la vitesse limite.

L'énoncé fournit (Doc. 2), le nombre de globules rouges par unité de volume : n est compris entre 4,5 et $6,0 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-3}$. Pour les calculs, on utilisera d'abord $n = 6,0 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-3}$.

On envisage un premier calcul simple pour déterminer la Vitesse de Sédimentation, consistant à déterminer la distance parcourue par les globules pendant Δt pour en déduire le nombre de globules ayant sédimenté, en supposant que la hauteur occupée par les globules ayant sédimenté est négligeable par rapport à la distance parcourue par ceux-ci pendant Δt . Puis, connaissant le volume occupé par un globule, il est possible d'en déduire la hauteur occupée par les globules. Si le résultat est négligeable par rapport à la distance parcourue par les globules, il sera alors acceptable (puisque le « fond ne se sera alors pas déplacé »).

Pour évaluer le volume occupé par un globule, on peut par exemple considérer qu'un globule occupe un volume équivalent à celui d'un parallélépipède rectangle de surface de base un carré de côté égal au diamètre d'un globule et de hauteur la hauteur d'un globule : le volume occupé par un globule serait alors $V_{occ} = (2R_e)^2 H = 70 \mu\text{m}^3$.

Note au jury : l'application numérique sera fournie au candidat.

Réaliser un calcul littéral

- ✓ Comment relier la hauteur cherchée à la vitesse des globules rouges ?

Soit d_{\max} la distance maximale parcourue par un globule pendant Δt (maximale car, une fois au fond, un globule ne se déplace plus) :

$$d_{\max} = v_l \Delta t = 6,7 \text{ mm}$$

Note au jury : l'application numérique sera fournie au candidat.

En notant $S = \frac{\pi d^2}{4}$ la section du tube à essais, et N le nombre de globules ayant sédimenté pendant Δt ,

$$N = d_{\max} S n = v_l \Delta t S n$$

En notant h la hauteur de globules sédimentés, il obtient alors : $Sh = NV_{occ} = v_l \Delta t S n V_{occ}$.

Donc $h = v_l \Delta t n V_{occ}$.

Réaliser un calcul numérique

On trouve $h = 2,8 \text{ mm}$

Critique de la démarche

✓ *Les hypothèses du modèle sont-elles vérifiées ?*

Donc h n'est pas négligeable devant d (ce qui était prévisible puisque d est de l'ordre du millimètre, tout comme h puisque le résultat de ce test était lisible à l'œil nu).

L'hypothèse posée est donc fautive, ce qui invalide le modèle.

Concevoir un modèle

✓ *Sur quel intervalle de temps réaliser le calcul précédent (en le modifiant légèrement) pour que l'hypothèse précédente soit vérifiée ?*

On doit donc reprendre le raisonnement : au lieu de réaliser le bilan pendant Δt , on utilise un intervalle de temps élémentaire dt pendant lequel l'interface entre le volume occupé par les globules ayant sédimenté et la solution est montée de dh .

Donc, pendant dt , un volume Sdh de sédiment s'est formé.

Réaliser un calcul littéral

✓ *Comment traduire le bilan de globules rouges sous forme élémentaire ?*

Les globules ayant sédimenté ont au plus parcouru une distance $v_l dt$: ils se trouvent donc dans un volume $S(v_l dt + dh)$ et sont donc au nombre de $S(v_l dt + dh)n$.

Leur volume propre est donc $S(v_l dt + dh)nV_{occ}$.

Donc, en identifiant les deux expressions, $dh = (v_l dt + dh)nV_{occ}$.

$$dh(1 - nV_{occ}) = nV_{occ}v_l dt$$

Et finalement, en intégrant,

$$h = \frac{nV_{occ}v_l}{1 - nV_{occ}} \Delta t$$

Note au jury : on fournira les applications numériques au candidat. $h = 4,9 \text{ mm}$ pour $n = 6,0 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-3}$

et $h = 3,7 \text{ mm}$ pour $n = 4,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^{-3}$.

La Vitesse de Sédimentation est donc comprise entre 3,7 mm et 4,9 mm

Confronter un modèle au réel

- ✓ Commenter ces résultats.

Ce résultat est d'un ordre de grandeur parfaitement plausible, puisque inférieur à la hauteur du tube à essais mais tout de même lisible à l'œil nu.

Note au jury : on peut signaler au candidat que, pour un homme (la formulation fournie dans le Doc. 2 concerne un homme en bonne santé ; les concentrations en globules sont légèrement plus faibles pour une femme en bonne santé et hors grossesse) les valeurs attendues sont **entre 3 mm et 6 mm** (elles peuvent légèrement varier selon les protocoles).

Par ailleurs, cette hauteur est directement liée à n et permet donc de déceler rapidement un défaut de numération en globules rouges.

Critiquer un modèle. Poser les limites d'un modèle.

- ✓ Les hypothèses du modèle sont-elles vérifiées ?
- ✓ Quel phénomène physique peut-on envisager suite à la sédimentation des globules rouges ?
- ✓ Ce phénomène modifie-t-il les résultats obtenus ?

Dans le modèle mis en place, la limite de la zone sédimentée paraît nette, ce qui n'est évidemment pas le cas et il est nécessaire de fixer une limite de transparence.

D'autre part, le calcul suppose que le nombre de particules par unité de volume reste constant au cours du temps, ce qui n'est valable que si la hauteur de liquide dans le tube à essais est supérieure à $h + v_l \Delta t = 12 \text{ mm}$, ce qui est bien le cas, le tube à essais ayant une hauteur de 7 cm et, étant, en général, rempli jusqu'à approximativement 1 cm du haut. De plus, nous supposons que tous les globules se déplacent exactement de la même manière, ce qui, dans la pratique, ne sera pas le cas puisqu'ils ne sont pas sphériques et seront donc soumis à des forces de frottement différentes.

Par ailleurs, compte tenu de la dimension des particules et la création d'un gradient lié à une forte concentration dans le fond du tube à essais, il peut être nécessaire de prendre en compte la **diffusion** de ces particules qui s'opposerait donc à la sédimentation.

Il faut donc évaluer un temps caractéristique du régime transitoire de diffusion des globules et le comparer à $\Delta t = 1 \text{ h}$.

Note au jury : on donnera au candidat qui en fera la demande la diffusivité des globules dans le plasma :
 $D \approx 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

La dimension caractéristique de la diffusion est $L \approx 1 \text{ cm}$ donc le temps caractéristique (à déterminer par analyse dimensionnelle) est $\tau_d = \frac{L^2}{D} \approx 10^7 \text{ s} \approx 2,8 \cdot 10^3 \text{ h} \approx 1,2 \cdot 10^2 \text{ jours} \approx 4 \text{ mois}$.

Note au jury : les applications numériques seront fournies au candidat

Donc $\tau_d \gg \Delta t$: la diffusion des globules est négligeable.

Enfin, on n'a pris en compte que les globules rouges et non les globules blancs et les plaquettes, ce qui modifierait (augmenterait) légèrement la vitesse de sédimentation. Les globules blancs sont de dimension

équivalente : leur mouvement sera proche de celui des globules rouges donc, compte tenu de leur concentration, leur apport est négligeable.

Envisager des perspectives.

✓ *Connaissez-vous d'autres processus de sédimentation, ou d'autres techniques de séparation ?*

La **sédimentation** se retrouve dans d'autres domaines :

- En géologie : les sédiments sont alors des dépôts meubles laissés par les eaux ou le vent.
- Un certain nombre de procédés de séparation sont fondés sur la sédimentation (alors parfois appelée décantation), par exemple dans les stations d'épuration.

La sédimentation n'est cependant généralement prépondérante que dans les milieux fluides statiques.

Il existe d'autres tests sanguins fondés sur la mécanique, et notamment la **centrifugation** (dont le principe est globalement le même mais nettement accéléré) : le sang est placé dans des éprouvettes, elles-mêmes placées dans une centrifugeuse dotée de bras et tournant à grande vitesse. Les éprouvettes peuvent être d'inclinaison libre ou fixe. Ce test permet de séparer rapidement les figurés du plasma afin de déterminer le taux d'hématocrite (volume des figurés sur le volume total de sang) ou de séparer les figurés du plasma pour des tests ultérieurs. Le principe serait le même que précédemment en ajoutant une force centrifuge, équivalente à une accélération de plus de 1 000 g , ce qui accélère considérablement la séparation puisque

$$\frac{h}{\Delta t} = \frac{nV_{occ}v_l}{1-nV_{occ}} \propto v_l \propto g.$$